

DEFORMACIJSKA ANALIZA PO POSTOPKU KARLSRUHE

DEFORMATION ANALYSIS, KARLSRUHE APPROACH

Tomaž Ambrožič

UDK: 528.1
POVZETEK

V članku je opisan postopek Karlsruhe, ki je eden izmed postopkov deformacijske analize. Z uporabo statističnih metod in na osnovi geodetskih opazovanj določimo, ali so premiki točk statistično značilni. Podan je prikaz metode na testnem primeru.

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.02
ABSTRACT

Karlsruhe approach, which is one of the methods for the deformation analysis, is presented in the article. Based on geodetic observations, statistical significance of displacements at the surface is determined by statistical methods. A numerical example shows the effectiveness of the presented method.

KLJUČNE BESEDE

deformacijska analiza, postopek Karlsruhe, računski primer

KEY WORDS

deformation analysis, Karlsruhe approach, numerical example

1 UVOD

Postopek Karlsruhe so razvili K. R. Koch, B. Heck, E. Kuntz in B. Meier-Hirmer na Geodetskem inštitutu Univerze Karlsruhe v Zvezni republiki Nemčiji.

Bistvo postopka Karlsruhe je (neodvisna) izravnava posameznih izmer in nato skupna izravnava opazovanj obeh izmer hkrati z naslednjimi predpostavkami, ki morajo biti izpolnjene pred skupno izravnavo:

- v obeh izmerah morajo biti osnovne točke mirujoče,
- v obeh izmerah mora biti merilo mreže enako in
- v obeh izmerah mora biti natančnost opazovanj homogena.

Prvo informacijo o stabilnosti osnovnih točk dobimo na osnovi geološko-geofizikalnega raziskovanja zemljišča okoli točk. Podatek o merilu mreže in prav tako informacijo o premikih osnovnih točk dobimo s Helmertovo transformacijo koordinat osnovnih točk tekoče izmere na predhodno. Neujemanje koordinat točk po transformaciji nam da informacijo o premikih osnovnih točk. Razliko v merilu mreže dobimo iz parametrov Helmertove transformacije. Homogenost

natančnosti opazovanj določimo, tako kot pri postopku Hannover, s testom F . Če so opazovanja nehomogena, moramo pred izravnavo popraviti njihove uteži.

Nadaljnje testiranje premikov točk pa naredimo s postopkom, ki ga opisujemo v tretjem poglavju Skupna izravnava opazovanj obeh izmer in testiranje hipoteze o premikih točk.

Postopek lahko razdelimo na tri korake:

- določitev uteži opazovanj, izravnava opazovanj posamezne izmere in odkrivanje grobih pogrškov med opazovanji,
- skupna izravnava opazovanj obeh izmer in testiranje hipoteze o premikih točk,
- končna izravnava opazovanj in grafična interpretacija rezultatov.

2 DOLOČITEV UTEŽI OPAZOVANJ, IZRAVNAVA OPAZOVANJ POSAMEZNE IZMERE IN ODKRIVANJE GROBIH POGREŠKOV MED OPAZOVANJI

Najprej moramo posvetiti pozornost izračunu referenčnih varianc enote uteži za dolžine $\sigma_{d_i}^2$ in za smeri $\sigma_{s_i}^2$ (Vodopivec in Kogoj, 1997). Indeks i označuje posamezno izmero: $i = 1$ označuje predhodno izmero, $i = 2$ pa tekočo izmero. Uteži različnih skupin opazovanj v posamezni izmeri izračunamo z naslednjima enačbama:

$$P_{d_i} = \frac{\sigma_{0_i}^2}{\sigma_{d_i}^2} \quad \text{in} \quad P_{s_i} = \frac{\sigma_{0_i}^2}{\sigma_{s_i}^2},$$

kjer je:

$\sigma_{0_i}^2$... a priori referenčna varianca enote uteži posamezne izmere,

$\sigma_{d_i}^2$, $\sigma_{s_i}^2$... oceni za referenčno varianco enote uteži za dolžine in smeri posamezne izmere.

Opazovanja moramo izravnati v prosti mreži za vsako izmero posebej, kot velja za druge postopke deformacijske analize. Orientacijske neznanke moramo odstraniti z redukcijo neznank v enačbah popravkov (Heck, 1983). Približne koordinate točk morajo biti v izravnavi predhodne in tekoče izmere enake.

V vsaki izravnavi posebej tvorimo kvadratno formo (vsoto kvadratov popravkov opazovanj)

$$\Omega_i = \mathbf{v}_i^T \mathbf{P}_i \mathbf{v}_i.$$

Skupno kvadratno formo za obe izmeri dobimo, če seštejemo kvadratni formi iz obeh izravnav (Heck, 1983; Ninkov, 1985; Ašanin, 1986; Mihailović in Aleksić, 1994)

$$\Omega_0 = \Omega_1 + \Omega_2 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}. \quad (1)$$

Število prostostnih stopenj b dobimo s seštevanjem števila prostostnih stopenj iz obeh izravnav:

$$b = b_1 + b_2, \quad (2)$$

kjer je:

$b_i = n_i - u_i + d_i$... število prostostnih stopenj posamezne izmere = število nadštevilnih opazovanj posamezne izmere,

n_i ... število opazovanj v posamezni izmeri,

u_i ... število neznank v posamezni izmeri in

d_i ... defekt datuma mreže.

Ugotoviti moramo tudi prisotnost grobih pogreškov med opazovanji in jih odstraniti. Grobo pogrešeno opazovanje lahko določimo po Baardovi, Popovi, danski metodi ali ustrezni drugi metodi (Caspary, 1988).

Prvi korak postopka Karlsruhe je torej izravnava opazovanj vsake izmere posebej in izračun skupne kvadratne forme – enačba (1) ter števila prostostnih stopenj – enačba (2).

3 SKUPNA IZRANAVA OPAZOVANJ OBEH IZMER IN TESTIRANJE HIPOTEZE O PREMIIH TOČK

Pri določevanju točk, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi točkami si v skupni izravnavi opazovanj pomagamo s testiranjem naslednje hipoteze (Heck, 1983; Ninkov, 1985; Ašanin, 1986; Mihailović in Aleksić, 1994):

$$H_0: E(\mathbf{l}) = \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ in } \mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{d} = \mathbf{0} \text{ točke mirujejo in} \quad (3)$$

$$H_1: E(\mathbf{l}) = \hat{\mathbf{l}} = \mathbf{A}\mathbf{x} \text{ in } \mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{d} \neq \mathbf{0} \text{ točke so se premaknile,} \quad (4)$$

kjer je:

\mathbf{A} ... matrika koeficientov enačb popravkov opazovanj,

\mathbf{x} ... vektor koordinatnih neznank,

$$\mathbf{B}^T = \begin{bmatrix}
 \overbrace{\mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N}}^z & \overbrace{\mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N}}^{x'} & \overbrace{\mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N}}^{x''} \\
 \vdots & \ddots & \vdots \\
 \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N} & \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N} & \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N} \\
 \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \mathbf{N} & \mathbf{E} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N} & -\mathbf{E} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{N} \\
 \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \mathbf{N} & \mathbf{N} \ \mathbf{E} \ \cdots \ \mathbf{N} & \mathbf{N} \ -\mathbf{E} \ \cdots \ \mathbf{N} \\
 \vdots & \vdots & \vdots \\
 \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \mathbf{N} & \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \cdots \ \mathbf{E} & \mathbf{N} \ \mathbf{N} \ \cdots \ -\mathbf{E}
 \end{bmatrix}$$

\mathbf{d} ... vektor razlik koordinat,

\mathbf{l} ... vektor opazovanj,

$\hat{\mathbf{l}}$... vektor izravnanih opazovanj,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{in} \quad \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ničelna hipoteza vključuje predpostavko, da je $\mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{d} = \mathbf{0}$, kar pomeni, da so premiki točk enaki nič. S statističnim testiranjem poskušamo ugotoviti, ali je morda \mathbf{d} statistično značilno različen od nič. V tem primeru moramo sprejeti alternativno hipotezo, da je $\mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{d} \neq \mathbf{0}$. S statističnim testiranjem določimo, ali so razlike izravnanih koordinat točk dveh izmer nastale samo zaradi pogrškov opazovanj ali zaradi pogrškov opazovanj in premikov točk.

V skupni izravnavi obeh izmer hkrati razdelimo vektor neznank (koordinat) \mathbf{X} na tri vektorje:

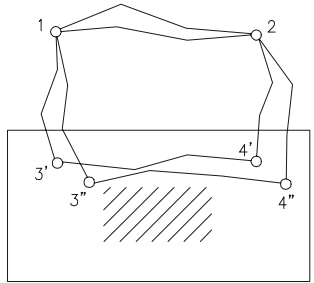
$$\mathbf{x}^T = [\mathbf{z}^T, \ \mathbf{x}'^T, \ \mathbf{x}''^T], \quad (5)$$

kjer je:

\mathbf{z} ... vektor koordinat osnovnih točk, za katere predpostavimo, da mirujejo v obeh izmerah,

\mathbf{x}' ... vektor koordinat točk predhodne izmere, za katere predpostavimo, da so se premaknile,

\mathbf{x}'' ... vektor koordinat točk tekoče izmere, za katere predpostavimo, da so se premaknile.



$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T & \mathbf{x}'^T & \mathbf{x}''^T \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^T, \mathbf{x}_2^T, \mathbf{x}_3'^T, \mathbf{x}_4'^T, \mathbf{x}_3''^T, \mathbf{x}_4''^T \end{bmatrix}$$

Slika 1: Vektor neznank v skupni izravnavi obeh izmer hkrati.

V skupni izravnavi nastopajo koordinate osnovnih točk (vektor \mathbf{z}) v vektorju neznank samo enkrat, koordinate točk, ki so se morda premaknile, pa dvakrat $\mathbf{x}'^T = [\mathbf{x}_1'^T, \mathbf{x}_2'^T, \dots]$ in $\mathbf{x}''^T = [\mathbf{x}_1''^T, \mathbf{x}_2''^T, \dots]$.

Funkcionalni model skupne izravnave opazovanih količin je

$$\mathbf{v}_z = \mathbf{Ax} - \mathbf{l}. \tag{6}$$

V okviru ničelne hipoteze predpostavimo, da velja pogoj

$$\mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{d} = \mathbf{0},$$

ki ga morajo izpolniti neznanke (koordinate točk). Če imamo točke, ki so se premaknile, med pogojno mirujočimi točkami in upoštevamo $\mathbf{B}^T \mathbf{x} = \mathbf{d} = \mathbf{0}$, se nam bodo v izravnavi premiki točk \mathbf{d} prenesli na vektor popravkov. Tako bo vektor popravkov \mathbf{v}_z vseboval tudi informacije o premikih točk.

V skupni izravnavi tvorimo kvadratno formo

$$\Omega_z = \mathbf{v}_z^T \mathbf{P} \mathbf{v}_z. \tag{7}$$

Če od kvadratne forme skupne izravnave Ω_z , ki vsebuje informacije o pogreških opazovanj in premikih točk, odštejemo kvadratno formo Ω_0 , ki vsebuje samo informacije o pogreških opazovanj, dobimo kvadratno formo, ki vsebuje samo informacije o premikih točk:

$$\Omega_h = \Omega_z - \Omega_0 = \mathbf{v}_z^T \mathbf{P} \mathbf{v}_z - \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}. \tag{8}$$

Kvadratne forme se porazdeljujejo po porazdelitvi χ^2 . Tako lahko zapišemo, da je Ω_0/σ_0^2 porazdeljen po porazdelitvi χ^2 z b prostostnimi stopnjami. Enako je porazdeljen tudi Ω_h/σ_0^2 s $f = (k-1)np_0 - d$ prostostnimi stopnjami, kjer je:

k ... število izmer v skupni izravnavi, v našem primeru $k = 2$,

n ... razsežnost mreže:

$n = 1$ za enorazsežne mreže,

$n = 2$ za dvorazsežne mreže,

p_0 ... število osnovnih točk, za katere predpostavimo, da mirujejo v obeh izmerah = število točk v vektorju \mathbf{z} ,

d ... defekt datuma mreže in

σ_0^2 ... referenčna varianca opazovanj v skupni izravnavi.

Tvorimo testno statistiko

$$F = \frac{\Omega_h/f}{\Omega_0/b} = \frac{\mathbf{v}_z^T \mathbf{P} \mathbf{v}_z - \mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}} \frac{b}{f}, \quad (9)$$

ki je porazdeljena po porazdelitvi F s f in b prostostnimi stopnjami.

S testno statistiko (9) testiramo postavljeno hipotezo (3). Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$F \leq F_{f,b,1-\alpha}, \quad (10)$$

potem ne moremo zavrni ničelne hipoteze, to pomeni, da za nobeno izmed pogojno mirujočih točk ne moremo trditi, da se je statistično značilno premaknila.

Če je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$F > F_{f,b,1-\alpha}, \quad (11)$$

potem zavrnamo ničelno hipotezo, to pomeni, da se je vsaj ena izmed pogojno mirujočih točk statistično značilno premaknila.

Med pogojno mirujočimi točkami moramo določiti točke, ki so se statistično značilno premaknile. Določimo jih z naslednjim postopkom.

- Skupno izravnavo obeh izmer moramo ponoviti p_0 -krat (p_0 je število pogojno mirujočih točk, torej število točk v vektorju \mathbf{z}) tako, da iz izravnave vsakič izločimo eno točko. V vsaki izravnavi izračunamo Ω_z , enačba (7).

- Izračunamo p_0 kvadratnih form iz prav toliko izravnjav. Izmed vseh je ena najmanjša. Za točko, pri kateri je vrednost kvadratne forme minimalna $(\Omega_z)_{\min}$, zaključimo, da se je statistično značilno premaknila.
- Točko, za katero smo ugotovili, da se je statistično značilno premaknila, prestavimo iz pogojno mirujočih med točke, ki so se statistično značilno premaknile, iz vektorja \mathbf{z} v vektorja \mathbf{x}' in \mathbf{x}'' , enačba (5), ter ponovno izračunamo v izravnavi Ω_z (7).
- Izračunamo testno statistiko F z enačbo (9).
- Če je izpolnjen pogoj (11), pomeni, da so med pogojno mirujočimi točkami še vedno točke, ki so se statistično značilno premaknile. Zato moramo celotni opisani postopek ponoviti in določiti še druge točke, ki so se statistično značilno premaknile, postopoma eno po eno.
- Če je izpolnjen pogoj (10), pomeni, da za nobeno izmed pogojno mirujočih točk ne moremo trditi, da se je statistično značilno premaknila. Ta iteracijski postopek določevanja točk, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi, je tako končan.

Drugi korak postopka Karlsruhe je torej določitev mirujočih točk po pravkar opisanem postopku, ki izpolnjujejo pogoj (10).

4 KONČNA IZRAVNAVA OPAZOVANJ IN GRAFIČNA INTERPRETACIJA REZULTATOV

Definitivno izravnavo opazovanj naredimo, ko smo izločili vse točke, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi točkami. Uporabimo funkcionalni model (6), kjer so v vektorju $\hat{\mathbf{z}}$ vektorja neznank $\hat{\mathbf{x}}$ samo mirujoče točke. Za vse druge točke, ki so se statistično značilno premaknile, velja dodaten matematični pogoj alternativne hipoteze (4) (Heck, Kuntz in Meier-Hirmer, 1977; Kuntz in Schmitt, 1977; Heck, 1983; Ninkov, 1985; Ašanin, 1986; Mihailović in Aleksić, 1994)

$$\mathbf{B}_j^T \hat{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{d}}_j, \quad (12)$$

kjer je:

$$\mathbf{B}_j^T = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_1 & & \mathbf{T}'_j & & \mathbf{T}'_{p_x} & \mathbf{T}''_1 & & \mathbf{T}''_j & & \mathbf{T}''_{p_x} \\ \mathbf{N} & \dots & \mathbf{N} & \mathbf{E} & \mathbf{N} & \dots & \mathbf{N} & \mathbf{N} & \dots & \mathbf{N} & -\mathbf{E} & \mathbf{N} & \dots & \mathbf{N} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ in } \mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$p_x \dots$ število točk, ki so se statistično značilno premaknile (število točk v vektorju $\hat{\mathbf{x}}'$ oziroma $\hat{\mathbf{x}}''$)

$$\hat{\mathbf{d}}_j = \begin{bmatrix} \hat{y}_j'' - \hat{y}_j' \\ \hat{x}_j'' - \hat{x}_j' \end{bmatrix} \dots \text{premik točke } j,$$

\hat{y}_j', \hat{x}_j' ... koordinati točke j predhodne izmere,

\hat{y}_j'', \hat{x}_j'' ... koordinati točke j tekoče izmere.

Glede na (12) lahko zapišemo matriko kofaktorjev

$$\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j} = \mathbf{B}_j^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}_j} \mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} q_{\hat{y}\hat{y}_j} & q_{\hat{y}\hat{x}_j} \\ q_{\hat{x}\hat{y}_j} & q_{\hat{x}\hat{x}_j} \end{bmatrix}_j,$$

kjer je:

$$q_{\hat{y}\hat{y}_j} = q_{\hat{y}'_j\hat{y}'_j} + q_{\hat{y}''_j\hat{y}''_j} - 2q_{\hat{y}'_j\hat{y}''_j},$$

$$q_{\hat{x}\hat{x}_j} = q_{\hat{x}'_j\hat{x}'_j} + q_{\hat{x}''_j\hat{x}''_j} - 2q_{\hat{x}'_j\hat{x}''_j},$$

$$q_{\hat{y}\hat{x}_j} = q_{\hat{y}'_j\hat{x}'_j} + q_{\hat{y}''_j\hat{x}''_j} - q_{\hat{y}'_j\hat{x}''_j} - q_{\hat{y}''_j\hat{x}'_j}.$$

V zadnjih treh enačbah so vrednosti koeficientov desnih strani enačb enake elementom matrike kofaktorjev skupne izravnave, ki se nanašajo na točko T_j v okviru matrik $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}'}$, $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}\hat{\mathbf{x}}''}$ in $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}'\hat{\mathbf{x}}''}$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}}} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}'} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}''} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}'}^T & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}'\hat{\mathbf{x}}'} & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}'\hat{\mathbf{x}}''} \\ \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{x}}''}^T & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}'\hat{\mathbf{x}}''}^T & \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{x}}''\hat{\mathbf{x}}''} \end{bmatrix}.$$

Za posamezno točko tvorimo testno statistiko

$$F_j = \frac{\theta_j^2}{S^2},$$

ki je za dvorazsežno mrežo porazdeljena po porazdelitvi F z 2 in f prostostnimi stopnjami in velja:

$$\theta_j^2 = \frac{\hat{\mathbf{d}}_j^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j}^{-1} \hat{\mathbf{d}}_j}{2},$$

$$S^2 = \hat{\sigma}_0^2 = \frac{b_1 \hat{\sigma}_{0_1}^2 + b_2 \hat{\sigma}_{0_2}^2}{b_1 + b_2},$$

$$f = b_1 + b_2$$

in tako dobimo

$$F_j = \frac{\hat{\mathbf{d}}_j^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j}^{-1} \hat{\mathbf{d}}_j}{2\hat{\sigma}_0^2}. \quad (13)$$

Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α ,

$$F_j \leq F_{2,f,1-\alpha} \quad (14a)$$

potem ne moremo zavrniti ničelne hipoteze (3).

Če je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$F_j > F_{2,f,1-\alpha}, \quad (15a)$$

potem zavrnemo ničelno hipotezo (3).

Za enorazsežno mrežo je

$$\theta_j^2 = \frac{\hat{\mathbf{d}}_j^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j}^{-1} \hat{\mathbf{d}}_j}{1}$$

in tako dobimo

$$F_j = \frac{\hat{\mathbf{d}}_j^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j}^{-1} \hat{\mathbf{d}}_j}{1 \hat{\sigma}_0^2} = \frac{\hat{d}_j^2}{\hat{\sigma}_0^2 Q_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j}},$$

kjer je:

$$\hat{\mathbf{d}}_j = \hat{H}_j'' - \hat{H}_j',$$

$$Q_{\hat{\mathbf{d}}\hat{\mathbf{d}}_j} = q_{\hat{H}_j' \hat{H}_j'} + q_{\hat{H}_j'' \hat{H}_j''} - 2q_{\hat{H}_j' \hat{H}_j''}.$$

Če je testna statistika manjša ali enaka kot kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$F_j \leq F_{1,f,1-\alpha} \quad (14b)$$

potem ne moremo zavrni ničelne hipoteze (3).

Če je testna statistika večja o kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa α

$$F_j > F_{1,f,1-\alpha}, \quad (15b)$$

potem zavrne ničelno hipotezo (3).

Obrazloženi način statističnega testiranja hipotez lahko tudi grafično interpretiramo. Oglejmo si primer za dvorazsežno mrežo.

Enačbo (13) upoštevamo v neenačbi (14a):

$$\hat{\mathbf{d}}_j^T \mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}_j}^{-1} \hat{\mathbf{d}}_j \leq 2\hat{\sigma}_0^2 F_{2,f,1-\alpha}$$

Ta izraz predstavlja območje znotraj elipse, ki je identična z relativno elipso pogreškov med točkama \mathbf{T}'_j in \mathbf{T}''_j , povečana za faktor $\sqrt{2F_{2,f,1-\alpha}}$. Velikosti polosi so:

$$A_l^2 = \hat{\sigma}_0^2 2F_{2,f,1-\alpha} \lambda_l, \quad l = 1, 2,$$

kjer sta λ_l lastni vrednosti matrice $\mathbf{Q}_{\hat{\mathbf{d}}_j}$:

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(q_{\hat{x}\hat{x}_j} + q_{\hat{y}\hat{y}_j} + \kappa),$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(q_{\hat{x}\hat{x}_j} + q_{\hat{y}\hat{y}_j} - \kappa),$$

$$\kappa = \sqrt{(q_{\hat{x}\hat{x}_j} - q_{\hat{y}\hat{y}_j})^2 + 4q_{\hat{y}\hat{x}_j}^2}.$$

Smerni kot velike polosi določimo iz enačbe

$$\tan 2\theta = \frac{2q_{\hat{y}\hat{x}_j}}{q_{\hat{x}\hat{x}_j} - q_{\hat{y}\hat{y}_j}}.$$

Z elipsami pogreškov lahko zelo enostavno grafično prikažemo analizo premikov. Na isti sliki narišemo vektorje premikov točk in relativne elipse pogreškov (seveda v istem merilu). Vektor

premika $\hat{\mathbf{d}}_j$ narišemo od točke T'_j proti točki T''_j . Relativno elipso pogreškov pa narišemo tako, da je njeno središče v točki T''_j .

Tretji korak postopka Karlsruhe, končna izravnava opazovanj in grafična interpretacija rezultatov, je tako končan.

5 RAČUNSKI PRIMER

Uporabnost postopka Karlsruhe želimo prikazati na primeru iz literature (Mihailović in Aleksić, 1994). Popolnoma isti primer smo obdelali tudi po postopku Hannover s programom **DAH**, zato skice mreže, vhodnih podatkov za izravnavi in izravnanih koordinat točk predhodne in tekoče izmere ne podajamo ponovno (glej Ambrožič, 2001). V preglednici 1 podajamo rezultate prvega koraka postopka Karlsruhe, ki smo jih dobili s programom **RaM** (Ambrožič in Turk, 1997).

	<i>Predhodna izmera</i>	<i>Tekoča izmera</i>
	$i = 1$	$i = 2$
σ_{d_i}	5 mm	5 mm
σ_{s_i}	1"	1"
Ω_i	28.221	40.103
Ω_0	68.324	
$\hat{\sigma}_{0_i}$	0.96990	1.15618
n_i	48	48
u_i	14+7	14+7
d_i	3	3
b_i	30	30
b	60	

Preglednica 1: Rezultati prvega koraka postopka Karlsruhe.

Podatke za izravnavo za drugi korak postopka Karlsruhe smo pripravili tako, da smo vsa opazovanja predhodne izmere uvrstili v prvo skupino (grupo) opazovanj, vsa opazovanja tekoče izmere pa v drugo skupino opazovanj. V vektorju neznank $\hat{\mathbf{x}}$ smo vse točke uvrstili v vektor $\hat{\mathbf{z}}$. V skupni izravnavi obeh izmer hkrati, ki smo jo izravnali kot prosto mrežo, smo torej za vsako

izmed sedmih točk imeli poleg dveh koordinatnih neznank še dve orientacijski neznanki, ki pa smo jih pred izravnavo reducirali. A priori standardna odklona enote uteži za smeri in za dolžine sta bila v skupni izravnavi obeh izmer hkrati enaka kot v izravnavi posamezne izmere.

Izračunana kvadratna forma po enačbi (7) v skupni izravnavi obeh izmer hkrati je 1840.53, izračunana testna statistika po enačbi (9) pa 141.48. Ker je testna statistika večja od kritične vrednosti pri izbrani stopnji značilnosti testa ($F_{11,60,0.95} = 1.95$), zavrnilo ničelno hipotezo (3), kar pomeni, da točke ne mirujejo.

Ker smo ničelno hipotezo (3) zavrnilo, pomeni, da imamo v mreži tudi točke, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi točkami. Zato v tem, drugem koraku določimo točke, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi točkami. V vsakem iteracijskem koraku moramo izvesti skupno izravnavo obeh izmer p_0 -krat (p_0 je število pogojno mirujočih točk oziroma število točk v vektorju $\hat{\mathbf{z}}$ in se po vsakem iteracijskem koraku zmanjša za ena) tako, da izločimo iz izravnave po eno, vedno drugo točko in v vsaki izravnavi izračunamo kvadratno formo po enačbi (7). Ugotovimo, pri kateri točki je vrednost kvadratne forme minimalna (v preglednici 2 je podčrtana). Ta točka se je statistično značilno premaknila in jo zato prestavimo iz pogojno mirujočih točk med točke, ki so se statistično značilno premaknile, enačba (5), ter v izravnavi ponovno izračunamo kvadratno formo po enačbi (7). Tvorimo testno statistiko po enačbi (9), ki jo primerjamo s kritično vrednostjo pri izbrani stopnji značilnosti testa. Iteracijski proces ponavljamo toliko časa, dokler je testna statistika (9) manjša, kot je kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa. V tem primeru ne moremo zavrniti ničelne hipoteze, ki pravi, da točke, ostale v vektorju $\hat{\mathbf{z}}$, mirujejo. Rezultate postopka določitve mirujočih točk podajamo v preglednici 2.

Podatke za izravnavo za določitev točk, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi točkami smo pripravili na naslednji način. Koordinate pogojno mirujočih točk v vektorju $\hat{\mathbf{z}}$ nastopajo le enkrat (na primer v 2. iteraciji so to koordinate točk 2, 3, 4, 5, 6 in 7). Točke, ki so se statistično značilno premaknile, pa imajo koordinate zapisane v vektorjih $\hat{\mathbf{x}}'$ in $\hat{\mathbf{x}}''$ (v 2. iteraciji so to koordinate točke 1; približne koordinate te točke so identične za točko $1'$ in $1''$). Opazovanja predhodne izmere na pogojno mirujočih točkah smo uvrstili v prvo skupino opazovanj, opazovanja tekoče izmere pa v drugo skupino opazovanj. Opazovanja predhodne kakor tudi opazovanja tekoče izmere na točkah, ki so se statistično značilno premaknile, smo seveda uvrstili v prvo skupino opazovanj (saj imamo opraviti z opazovanji na "različnih" točkah $1'$ in $1''$). A priori standardna odklona enote uteži za smeri in za dolžine sta bila v izravnavi za določitev točk, ki so se statistično značilno premaknile, med pogojno mirujočimi točkami enaka kot v izravnavi posamezne izmere. Iz tako pripravljene datoteke smo nato postopoma izločevali po eno točko (v 2. iteraciji sta to najprej približni koordinati točke 2 ter seveda vsa opazovanja s te točke in proti tej točki, nato približne koordinate točk 3, 4, 5, 6 in 7) in v vsaki izravnavi smo izračunali kvadratno formo po enačbi (7), ki jo podajamo v preglednici 2. Ko smo ugotovili, pri kateri točki je vrednost kvadratne forme minimalna (v 2. iteraciji je to točka 7), smo koordinate te točke prestavili iz vektorja $\hat{\mathbf{z}}$ v vektorja $\hat{\mathbf{x}}'$ in $\hat{\mathbf{x}}''$. Podobno smo opazovanja na tej točki

uvrstili v prvo skupino opazovanj (v 2. iteraciji je to točka $7'$ in $7''$) in izračunali kvadratno formo po enačbi (7), ki smo jo na koncu iteracijskega koraka primerjali s kritično vrednostjo pri izbrani stopnji značilnosti testa.

	1. iteracija	2. iteracija	3. iteracija	4. iteracija
Izločena točka	1			
Ω_z	<u>847.96</u>			
Izločena točka	2	2	2	
Ω_z	1062.72	666.75	<u>187.68</u>	
Izločena točka	3	3	3	3
Ω_z	1257.89	614.41	241.24	<u>56.26</u>
Izločena točka	4	4	4	4
Ω_z	1525.83	771.05	525.50	71.61
Izločena točka	5	5	5	5
Ω_z	1652.54	871.93	664.73	184.84
Izločena točka	6	6	6	6
Ω_z	1509.08	804.15	595.42	188.65
Izločena točka	7	7		
Ω_z	877.93	<u>470.95</u>		
Točke v $\hat{\mathbf{z}}$	2,3,4,5,6,7	2,3,4,5,6	3,4,5,6	4,5,6
Točke v $\hat{\mathbf{x}}'$ in $\hat{\mathbf{x}}''$	1	1,7	1,7,2	1,7,2,3
Ω_z	1085.02	721.41	215.72	69.57
$F(f, b)$	81.17	52.14	11.77	0.10
f	9	7	5	3
$F_{f,b,1-\alpha}$	2.04	2.17	2.37	2.76

Preglednica 2: Rezultati postopka določitve točk, ki so se statistično značilno premaknile.

Vektor koordinat osnovnih točk $\hat{\mathbf{z}}$, za katere predpostavimo, da mirujejo, sestavljajo po 4. iteraciji točke 4, 5 in 6, druge koordinate točk sestavljajo vektorja $\hat{\mathbf{x}}'$ in $\hat{\mathbf{x}}''$. Poleg navedene kvadratne

forme v preglednici 2, ki je rezultat definitivne skupne izravnave, podajamo izravnane koordinate in elemente matrike kofaktorjev (uporabljene v nadaljevanju) v preglednici 3.

Točka		Izravnana koordinata [m]	Elementi matrike kofaktorjev $Q_{\hat{a}\hat{a}_j}$			
			Predhodna izmera		Tekoča izmera	
			\hat{y}'	\hat{x}'	\hat{y}''	\hat{x}''
1	\hat{y}'	1000.0038	0.1399697	-0.0483643	0.1399615	-0.0483635
	\hat{x}'	999.9946	-0.0483643	0.1385962	-0.0483635	0.1385904
	\hat{y}''	999.9841	0.1399615	-0.0483635	0.1399697	-0.0483643
	\hat{x}''	999.9566	-0.0483635	0.1385904	-0.0483643	0.1385962
2	\hat{y}'	2000.0065	0.1399711	0.0276374	0.1399601	0.0276356
	\hat{x}'	1000.0027	0.0276374	0.1064849	0.0276356	0.1064764
	\hat{y}''	1999.9677	0.1399601	0.0276356	0.1399711	0.0276374
	\hat{x}''	1000.0517	0.0276356	0.1064764	0.0276374	0.1064849
3	\hat{y}'	2600.0032	0.0985425	-0.0288822	0.0985373	-0.0288821
	\hat{x}'	1900.0039	-0.0288822	0.2002550	-0.0288821	0.2002457
	\hat{y}''	2600.0238	0.0985373	-0.0288821	0.0985425	-0.0288822
	\hat{x}''	1899.9595	-0.0288821	0.2002457	-0.0288822	0.2002550
7	\hat{y}'	1499.9997	0.0937237	0.0024813	0.0937206	0.0024815
	\hat{x}'	1799.9994	0.0024813	0.0931012	0.0024815	0.0930977
	\hat{y}''	1500.0233	0.0937206	0.0024815	0.0937237	0.0024813
	\hat{x}''	1800.0423	0.0024815	0.0930977	0.0024813	0.0931012

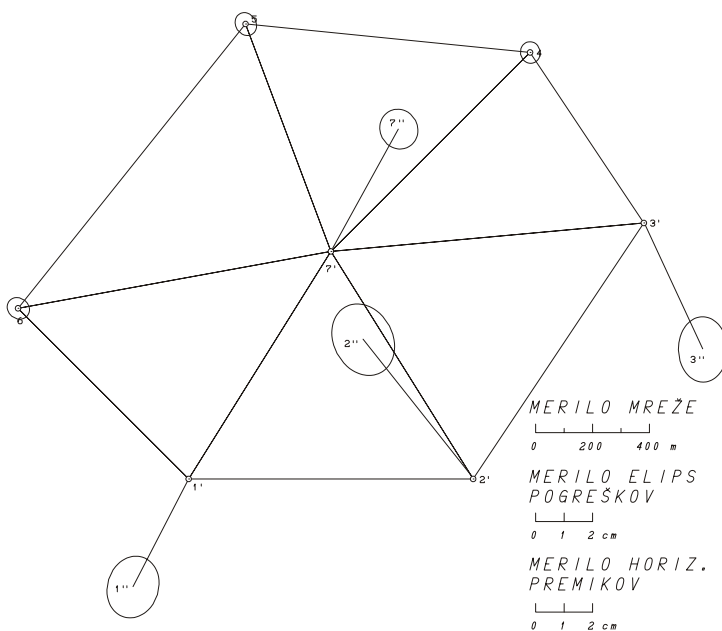
Preglednica 3: Rezultati skupne izravnave, ko točke 4, 5, in 6 obravnavamo kot mirujoče.

Iz podanih rezultatov v preglednici 3 za posamezno točko izračunamo testno statistiko po enačbi (13). Ker je testna statistika večja, kot je kritična vrednost pri izbrani stopnji značilnosti testa ($F_{2,60,0.95} = 3.15$), zavrնemo ničelno hipotezo (3), kar pomeni, da točke ne mirujejo. Za grafično interpretacijo izračunamo elemente relativnih elips pogreškov po enačbah (16) in (17) za točke, ki so se statistično značilno premaknile. Rezultate podajamo v preglednici 4 in na sliki

2. Elipse pogreškov na mirujočih točkah izračunamo tudi po enačbah (16) in (17), le da namesto elementov matrike kofaktorjev $Q_{\hat{a}\hat{a}_j}$ vzamemo kar pripadajoče elemente matrike kofaktorjev skupne izravnave $Q_{\hat{z}\hat{z}}$.

Točka	$F(2,b)$	A [m]	B [m]	θ [°]	\hat{d}_y [m]	\hat{d}_x [m]	\hat{d} [m]	Premaknila
1	70.99	0.0110	0.0090	17.3	-0.0197	-0.0380	0.0428	Da
2	112.70	0.0131	0.0104	152.3	-0.0388	0.0490	0.0625	Da
3	64.15	0.0115	0.0086	179.0	0.0206	-0.0444	0.0489	Da
7	166.06	0.0071	0.0066	152.6	0.0236	0.0429	0.0490	Da
4		0.0038	0.0035	168.8				Ne
5		0.0042	0.0036	146.0				Ne
6		0.0041	0.0036	39.6				Ne

Preglednica 4: Testne statistike, elementi relativnih elips pogreškov in premiki točk, ki so se statistično značilno premaknile.



Slika 2: Elipse pogreškov in premiki točk.

6 ZAKLJUČEK

Eden izmed postopkov deformacijske analize je postopek Karlsruhe, ki smo ga podrobno predstavili. Na podanem rešenem primeru prikazujemo uporabnost postopka. Za izravnave smo uporabili program **RaM**, elemente relativnih elips pogreškov smo izračunali v **Excelu**, skico mreže, relativne elipse pogreškov in premike smo izrisali s programoma **RisRaM** oziroma **Premik**.

Izračunani rezultati so podobni rezultatom, izračunanim po postopku Hannover (Ambrožič, 2001). V preglednici 5 primerjamo izračunane koordinatne razlike po obeh postopkih s simuliranimi koordinatnimi razlikami.

	Točka	1	2	3	4	5	6	7
Simulirano	d_y [mm]	-20.0	-30.0	25.0	0.0	0.0	0.0	25.0
	d_x [mm]	-34.6	52.0	-43.3	0.0	0.0	0.0	43.3
	d [mm]	40.0	60.0	50.0	0.0	0.0	0.0	50.0
	ν [°]	210	330	150	-	-	-	30
Karlsruhe	\hat{d}_y [mm]	-19.7	-38.8	20.6	-	-	-	23.6
	\hat{d}_x [mm]	-38.0	49.0	-44.4	-	-	-	42.9
	d [mm]	42.8	62.5	48.9	-	-	-	49.0
	ν [°]	207	322	155	-	-	-	29
	Premaknila	da	da	da	ne	ne	ne	da
Hannover	d_y [mm]	-19.6	-38.7	20.6	-4.0	-6.4	3.3	23.6
	d_x [mm]	-38.0	49.0	-44.3	5.1	-7.1	-10.6	42.9
	d [mm]	42.8	62.4	48.9	6.5	10.0	11.1	49.0
	ν [°]	207	322	155	322	222	163	29
	Premaknila	da	da	da	ne	ne	ne	da

Preglednica 5: Primerjava izračunanih koordinatnih razlik po postopku Karlsruhe in Hannover s simuliranimi koordinatnimi razlikami v [mm].

Iz preglednice 5 tudi vidimo, da so tudi premiki točk, ki so se statistično značilno premaknile, primerljivi s simuliranimi. Na podlagi izračunanih rezultatov lahko zaključimo, da je postopek Karlsruhe kot tudi postopek Hannover uporaben za določitev mirovanja točk v geodetski mreži.

Literatura in viri:

- Ambrožič, T. (2001). *Deformacijska analiza po postopku Hannover*. *Geodetski vestnik*, 45 (1-2), 38-53.
- Ambrožič, T., Turk, G. (1997). Navodila za uporabo programa RaM ver. 3.2, avg. 96, in GeM3 ver. 3.1, mar. 97. *Interna izdaja*.
- Ašanin, S. (1986). *Prilog obradi i analizi geodetskih merenja za odredjivanje pomeranja i deformacija objekta i tla*. *Doktorska disertacija*. Beograd: Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju.
- Caspary, W. F. (1988). *Concepts of Network and Deformation Analysis*. Kensington: The University of New South Wales, School of Surveying.
- Heck, B. (1983). *Das Analyseverfahren Des Geodätischen Instituts Der Universität Karlsruhe Stand 1983*. V *Deformationsanalysen '83. Geometrische Analyse und Interpretation von Deformationen Geodätischer Netze* (str. 153-182). München: Hochschule der Bundeswehr. Knjiga 9.
- Heck, B., Kuntz, E., Meier-Hirmer, B. (1977). *Deformationsanalyse mittels relativer Fehlerellipsen*. *AVN*, 84 (3), 78-87.
- Kuntz, E., Schmitt, G. (1977). *Analyse von Deformationsmessungen mit Hilfe relativer Fehlerellipsen*. V *Seminar über Deformationsanalysen* (str. 26-44). München: Hochschule der Bundeswehr]. Knjiga 4.
- Mihailović, K., Aleksić, I. R. (1994). *Deformaciona analiza geodetskih mreža*. Beograd: Gradjevinski fakultet, Institut za geodeziju.
- Ninkov, T. (1985). *Deformaciona analiza i njena praktična primena*. *Geodetski list*, 39 /62/ (7-9), 167-178.
- Vodopivec, F., Kogoj, D. (1997). *Ausgleichung nach der Methode der kleinsten Quadrate mit der a posteriori Schätzung der Gewichte*. *Österreichische Zeitschrift Für Vermessung & Geoinformation*, 85 (3/97), 202-207.

doc. dr. Tomaž Ambrožič, univ. dipl. inž. geod., univ. dipl. inž. rud.
 FGg - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana
 E-pošta: tambrozi@fgg.uni-lj.si

Prispelo za objavo: 2. avgust 2004