

IZRAČUN POLOŽAJA GPS-SATELITA IZ PODATKOV PRECIZNIH EFEMERID

GPS-ORBIT COMPUTATION FROM PRECISE EPHEMERIS DATA

Polona Pavlovčič Prešeren, Bojan Stopar

UDK: 528.33

POVZETEK

V prispevku opisujemo teoretične osnove uporabe preciznih (angl. precise) GPS-efemerid, ki jih dodatno vključujemo v zahtevnejše obdelave GPS-opazovanj. Uporaba preciznih efemerid nam glede na oddane (angl. broadcast) efemeride omogoča doseči boljše rezultate obdelave GPS-opazovanj. Precizne efemeride nam posredujejo različne GPS-službe preko svetovnega spleta v standardni (ASCII-zapis), povečini pa kar v »skrajšani« obliki. Količina podatkov, ki jih vsebujejo, narekuje na specifično izbiro metod izračuna položaja GPS-satelita. Precizne efemeride v popolni obliki vsebujejo podatke o položajih in hitrostih GPS-satelitov, v skrajšani pa le podatke o položajih GPS-satelitov. V članku bomo zato pokazali pot pridobitve preciznih efemerid različnih GPS-služb ter utemeljili njihove prednosti in slabosti. Nadalje bomo opisali matematična izhodišča, ki so predmet uporabnosti podatkov (numerična integracija, različne interpolacijske in aproksimacijske metode), ter njihove prednosti in slabosti. Glede na to, da je služba IGS v problematiki točnosti in časovne zakasnitve pridobitve podatkov preciznih efemerid v letu 2001 naredila korak naprej, bodo podatki preciznih efemerid te službe osnova praktičnim primerom.

KLJUČNE BESEDE

oddane/precizne efemeride, GPS-službe, numerična integracija, interpolacioproksimacija, služba IGS, časovna zakasnitev

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.01

ABSTRACT

The article describes the theoretical point of view of the GPS precise ephemerides application that should be used in most precise GPS processing. Regarding broadcast, precise ephemerides allow us to achieve a much better accuracy of the final GPS processing results. There are several GPS services that via the internet interpose data in the standard form, but usually in the shortened form. This means that precise ephemeris data include only positional data, however in their complete form, GPS satellite-position and velocity data should be included. In this view there are different mathematical approaches of handling precise ephemeris data with the main goal of GPS satellite position computation. We will show the precise ephemeris data acquirement and its advantages and disadvantages. Further we will show different mathematical methods - numerical integration, interpolation and approximation - and their characteristics. Because the IGS service has done a step forward to solving the problem of time delay (in 2001) and to achieving a better initial accuracy we will use the IGS precise ephemerides in most practical examples.

KEY WORDS

broadcast/precise ephemerides, GPS services, numerical integration, interpolation, approximation, IGS service, time delay, accuracy

UVOD

V lanski junijski številki *Geodetskega vestnika* (Pavlovčič Prešeren, Stopar, 2004) smo pokazali, zakaj uporaba oddanih efemerid v visokonatančnih obdelavah GPS-opazovanj ni najbolj primerna. Podatki oddanih efemerid nam zaradi že znanih pomanjkljivosti¹ ne omogočajo doseči zelene točnosti končnih rezultatov obdelave GPS-opazovanj. Omenjeni problem je širšemu krogu uporabnikov tehnologije GPS znan že dolgo, uporabniki pa pod pojmom uporabe preciznih efemerid poznajo tudi rešitev problema. Danes skoraj ne poznamo komercialnega ali profesionalnega programskega paketa za obdelavo GPS-opazovanj, ki ne bi vključeval možnosti uporabe preciznih efemerid. Ker pa komercialni programski paketi velikokrat delujejo kot "črne skrinjice" in uporabniku kaj več ni pojasnjenega oziroma mu kaj več sploh ni treba vedeti, bomo na naslednjih straneh pod drobnogled vzeli problem preciznih efemerid.

Izračun položaja GPS-satelita v poljubnem trenutku nam lahko predstavlja prijeten matematični izziv, kar nam narekuje oblika podatkov preciznih efemerid. Položaji vseh aktivnih GPS-satelitov so podani v časovno ekvidistantni tabeli, kjer je razmik med podatki (položaji in hitrosti GPS-satelitov) 900 ali 1200 sekund (navadno uporabljajo razmik 900 sekund, to je 15 minut). Takoj vidimo, da se rešitev problematike preciznih efemerid skriva v poglavjih numerične analize, predvsem interpolacije, aproksimacije in numerične integracije. Izmed naštetih je slednja najbolj natančna, vendar za izdelavo "lastnega" programa najbolj zahtevna, saj moramo v program vključiti dodatne podatke, in sicer: podatke o precesiji, nutaciji, rotaciji Zemlje in gibanju polov, podatke o vplivih na gibanje GPS-satelita ter podatke o lastnostih GPS-satelitov (masa, površina sončnih panelov). V postopku numerične integracije v bistvu rešujemo enačbo gibanja GPS-satelita, ki jo opišemo z diferencialno enačbo drugega reda (enačba 1). Pri uporabi interpolacijskih metod imamo sicer na voljo več možnosti določitve interpolacijskih polinomov, dodatnih podatkov pa tu ni treba vključevati. Vendar velja vedeti, da imajo tako interpolacijske kot aproksimacijske metode pomanjkljivosti, ki jih lahko dodobra spoznamo le, če rezultate primerjamo s tistimi, ki jih dobimo s postopki numerične integracije.

Problematiko uporabe preciznih efemerid bi lahko razdelili v tri dele, in sicer: problem časovne zakasnitve pridobitve podatkov, problem okrnjene oblike podatkov in problem točnosti podatkov. Da bo problem razumljiv širšemu krogu bralcev, bomo v članku najprej predstavili način, kako GPS-službe določijo podatke preciznih efemerid in način ter obliko podatkov, ki jih posredujejo uporabnikom.

1 PODATKI PRECIZNIH EFEMERID

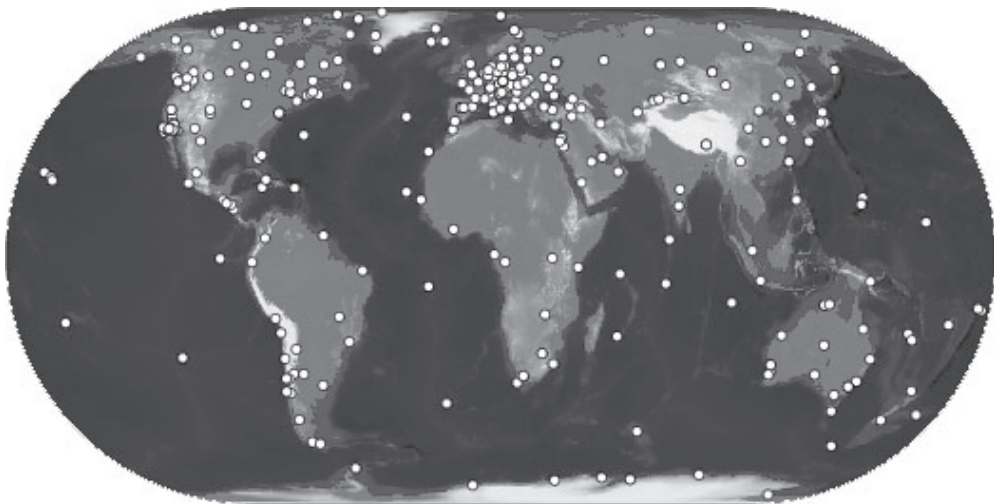
1.1 Način pridobitve preciznih efemerid

Uporaba oddanih efemerid velikokrat v smislu dosegljive natančnosti ne omogoča doseganja zelenih rezultatov obdelave GPS-opazovanj. Zato so osnovali GPS-službe, kjer z naknadno obdelavo faznih opazovanj določijo efemeride za GPS-satelite za nazaj. Uporabnik lahko bolj

¹ Zaradi načina pridobitve podatkov že začetna točnost ni najboljša, poleg tega s "staranjem" podatkov na točnosti še izgubljamo

korektne podatke o položajih GPS-satelitov pridobi preko spleta s časovnim zamikom od 14 pa do nekaj dni, od novembra 2001 pa tudi za dva dneva vnaprej. Nalogo določitve efemerid GPS-satelitov in nadaljnega posredovanja podatkov uporabnikom imajo GPS-službe, ki delujejo samostojno oziroma pod okriljem službe IGS (angl. International GPS Service).

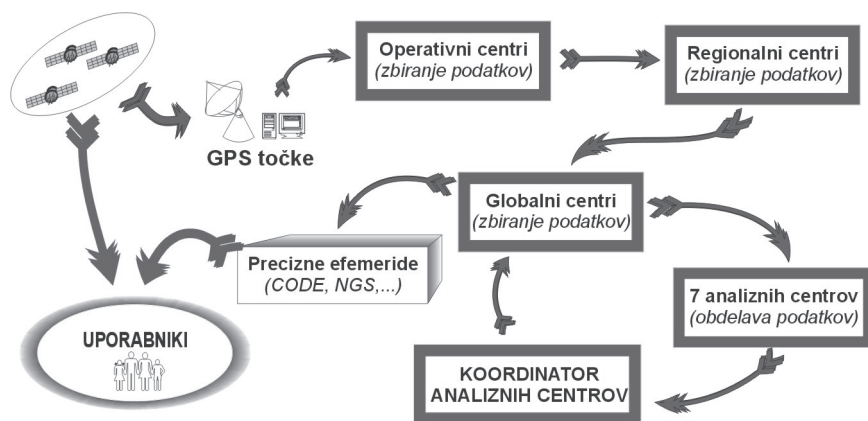
Določitev preciznih efemerid sloni na dobro vzpostavljenih geodetskih mrežah opazovalnih točk. Sprva so precizne efemeride pridobili z obdelavo opazovanj regionalnih mrež z dolžinami baznih vektorjev nad 1000 km, ker pa so stohastične analize pokazale na izrazito povečanje natančnosti rezultatov na primeru mrež večjih razsežnosti, danes večina GPS-služb določa precizne efemeride na primeru globalnih mrež (slika 1).



GMT Feb 24 17:32:11 2005

Slika 1: Globalna mreža službe IGS.

V začetku 90. let so pod okriljem mednarodnega združenja za geodezijo IAG (angl. International Association of Geodesy) pričeli vzpostavljati službo IGS, ki je po začetnem uvajanju praktično začela delovati leta 1994. Trenutno služba nudi podatke preciznih efemerid in parametre orientacije Zemlje preko postopoma razširjenega koordinatnega sestava ITRF (skoraj dvesto točk) pa nudi tudi natančne podatke o globalnih deformacijah površja Zemlje in podatke, povezane s stanjem atmosfere.



Slika 2: Delovanje službe IGS.

Na sliki 2 opisujemo delovanje službe, ki združuje delovanje operativnih centrov, ki zbirajo podatke GPS-opazovanj in jih posredujejo regionalnim centrom, ti pa naprej globalnim centrom. Obdelava GPS-opazovanj in priprava preciznih efemerid poteka na dveh nivojih. Najprej v sedmih analiznih centrih (med katere spada tudi CODE (angl. Center for Orbit Determination in Europe)), ki precizne efemeride nudijo uporabnikom in jih hkrati posredujejo koordinatorju analiznih centrov. Tu z združevanjem preciznih efemerid analiznih centrov določijo uradne precizne efemeride službe IGS približno s štirinajstnevno zamudo. Tako dobljene podatke pošljejo nazaj globalnim centrom za zbiranje podatkov in centrom za arhiviranje podatkov.

1.2 Oblika podatkov preciznih efemerid

Oblika podatkov, ki jih precizne efemeride vsebujejo, je enotna ne glede na to, katera GPS-služba nam podatke posreduje. Podatke podajajo tabelarično v ASCII-zapisu – za interval 15 minut službe posredujejo podatke o položaju (lahko tudi o hitrosti) vseh aktivnih GPS-satelitov. V večini primerov v tabelah preciznih efemerid ne podajajo vseh neodvisnih količin za opis položaja in hitrosti GPS-satelitov, ampak le položajne podatke. To nam sicer zmanjša količino podatkov, ki jo datoteke s preciznimi efemeridami vsebujejo, vendar onemogoča, da bi lahko podatke uporabili v povezavi z najnatančnejšimi postopki izračuna položaja satelita v poljubnem trenutku (numerična integracija). Služba IGS in globalni center Evrope CODE nam na primer podajata le podatke o položaju aktivnih GPS-satelitov, služba NIMA (angl. National Imagery and Mapping Agency) pa nam nudi tako podatke o položaju kot tudi podatke o hitrostih za vse aktivne GPS-satelite.

```

.
.
* 2002 9 5 0 0 0.00000000
P 1 108.862102 -26376.339762 3102.971661 246.756645
P 2 13647.599455 -10266.574519 20972.067622 -258.549316
.
.
.
P 31 5141.707750 -25058.734283 6197.245978 360.893079
* 2002 9 5 0 15 0.00000000
P 1 348.217541 -26537.489872 234.937283 246.758023
.
.
.
.
.
* 2002 9 5 23 45 0.00000000
P 1 -81.668719 -26068.122584 5145.055332 246.904616
.
.
.
P 31 4933.605167 -25525.723810 4213.171549 361.006220
EOF

```

Slika 3: Izsek iz datoteke preciznih efemerid, ki vsebuje le podatke o položajih GPS-satelitov (oznaka P) in podatke o stanju ur.

1.3 Delitev efemerid glede na hitrost dostopa do podatkov

S hitrostjo dostopa do podatkov je povezana natančnost podatkov, ki jih datoteke s preciznimi efemeridami vsebujejo. Kasneje dostopni podatki preciznih efemerid so rezultat dolgotrajne obdelave podatkov GPS-opazovanj več opazovališč, zato so ti podatki najboljši, a tudi najkasneje dostopni. Tudi način pridobitve tako imenovanih končnih preciznih efemerid službe IGS je drugačen od najhitrejših preciznih efemerid službe IGS (angl. Ultra rapid ephemerides) – v prvem primeru gre za naknadno obdelavo že opravljenih faznih GPS-opazovanj, v drugem primeru pa za predvidevanje vnaprej. Glede hitrosti pridobitve in s tem povezano natančnost podatkov preciznih efemerid te delimo v:

- najkasneje dostopne, to je *končne precizne efemeride* (angl. final), kamor uvrščamo efemeride služb IGS, CODE, NGS (od 2001 niso več na voljo):
 - a) končne efemeride službe IGS so na voljo od junija 1992, in sicer z zamikom od 8 do 12 dni. Zakasnitev je odvisna od dneva v tednu, za katerega želimo pridobiti podatke;
 - b) efemeride CODE so na voljo od 7 do 13 dni po končani izmeri (spet odvisno od dneva v tednu);
- *hitre efemeride*, kamor uvrščamo hitre efemeride IGS (angl. rapid ephemerides), ki jih poznamo pod kratico IGR, in efemeride NIMA. Prve so od junija 1996 na voljo s časovnim zamikom dveh dni, druge pa s časovnim zamikom od 3 do 4 dni;
- *najhitreje efemeride* (angl. ultra-rapid ephemerides) določijo z ekstrapolacijo (to je s predvidevanjem). Služba IGS jih nudi pod kratico IGU, na voljo pa so za dva dneva nazaj in dan vnaprej. Kasneje jih nadomestijo z efemeridami IGR;
- **oddane efemeride* (angl. broadcast ephemerides), ki jih sicer ne uvrščamo v široko množico preciznih efemerid, vendar jih na danem mestu omenjamo zato, ker tudi te podatke, enako kot efemeride IGU, dobimo v času izvajanja opazovanj. Podrobneje smo te že obrazložili (GV št. 2, 2004).

1.4 Opredelitev kvalitete podatkov preciznih efemerid

V članku, kjer smo pod drobnogled vzeli opredelitev natančnosti določitve položaja satelita iz oddanih efemerid (GV št. 2, 2004), smo pokazali, da se natančnost določitve položaja s staranjem podatkov oddanih efemerid slabša. Razlog za to izhaja iz načina določitve in uporabe oddanih efemerid. V primeru preciznih efemerid je situacija drugačna, saj tu ne gre povezovati natančnosti podatkov z njihovo starostjo. Situacija je celo obrnjena: starejši, kot so podatki (oziroma kasneje, ko jih dobimo), bolj natančni so. V primeru uporabe podatkov preciznih efemerid lahko rečemo, da je natančnost določitve položaja satelita neodvisna od izbranega trenutka. To pomeni, da ne glede na izbrani trenutek govorimo o enaki dosegljivi natančnosti izračuna položaja GPS-satelita. V primeru GPS-efemerid bi sicer o točnosti zaradi narave problema le redko govorili, če pa izhajamo iz tega, da se pojmu točnosti najbolj približajo podatki končnih preciznih efemerid službe IGS, lahko rečemo, da se tem glede kvalitete najbolj približajo efemeride CODE (odstopanja v komponentah vektorja položaja nekaj cm (Pavlovčič Prešeren, 2003)). Tem sledijo hitre efemeride IGR, natančnost katerih je sorodna podatkom v efemeridah NIMA, sledijo pa jim predvidene efemeride IGU.

2 IZRAČUN POLOŽAJA GPS-SATELITA IZ PODATKOV PRECIZNIH EFEMERID

Gibanje objektov v vesolju lahko le v prvi aproksimaciji predstavimo z gibanjem po elipsi tira, katere osnova so Keplerjevi zakoni. Dejansko gibanje umetnih objektov v vesolju je podvržemo zunanjim vplivom, ki jih je v visokonatančnih študijah treba modelirati in v izračunu upoštevati. Znanih je več matematičnih pristopov reševanja problema gibanja, ki so odvisni predvsem od razpoložljivih izhodiščnih podatkov.

2.1 Numerična integracija

Osnova najbolj natančnim metodam izračuna položaja satelita na tirnici je reševanje enačbe gibanja, to je diferencialne enačbe drugega reda, zapisane v nebesnem koordinatnem sistemu (Montenbruck, Gill, 2000):

$$\vec{a} = -\frac{GM_{\oplus}}{|\vec{r}|^3} \cdot \vec{r} + \Delta\vec{a}, \quad (1)$$

z začetnima pogojeva \vec{r}_0 in \vec{v}_0 , kjer so:

- \vec{a} celotni pospešek kot vsota delnih pospeškov zaradi delovanja zunanjih sil,
- GM_{\oplus} produkt gravitacijske konstante G in mase Zemlje M_{\oplus} ,
- \vec{r} radij vektor satelita v nebesnem koordinatnem sistemu,
- \vec{v} vektor hitrosti satelita v nebesnem koordinatnem sistemu,
- $\Delta\vec{a}$ pospešek kot vsota zunanjih vplivov, ki ne izhajajo iz privlačne sile Zemlje kot homogenega telesa.

V drugem členu desne strani enačbe (1) so v obliki pospeška zmodelirani vplivi zunanjih sil, kot so: nesferična porazdelitev zemeljskih mas, vpliv Lune, Sonca in drugih planetov, direktni in posredni vpliv sončnega sevanja, zračni upor, plimovanje čvrste Zemlje in oceanov, relativistični vplivi, elektromagnetni vplivi, vpliv izgorevanja goriva v motorjih satelitskega sistema ... (Pavlovič Prešeren, 2003).

Matematično k problemu pristopimo z numeričnim reševanjem diferencialne enačbe drugega reda z enočlenskimi metodami (Runge-Kutta in Runge-Kutta-Nyström) ali z veččlenskimi metodami, kot so: Gauss-Jackson in Störmer-Cowell za reševanje diferencialnih enačb drugega reda ter Adams-Bashforth in Adams Moulton za reševanje diferencialnih enačb prvega reda.

Navadno tri enačbe drugega reda (1) preuredimo v šest enačb prvega reda, da lahko uporabimo širši razred integracijskih metod. Sistem enačb prvega reda, na osnovi katerega rešujemo problem gibanja satelita, imenujemo Cowellova formulacija:

$$\begin{bmatrix} \frac{d\vec{r}}{dt} \\ \frac{d\vec{v}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{a}(t, \vec{r}, \vec{v}) \end{bmatrix},$$

in jo opišemo v povezavi z začetnimi pogoji: (2)

$$\begin{bmatrix} \vec{r} \\ \vec{v} \end{bmatrix}(t_0) = \begin{bmatrix} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{bmatrix}.$$

Zgornji problem naprej rešujemo z metodo Runge-Kutta.

Če pa zanemarimo vplive na GPS-satelite, ki so odvisni tudi od hitrosti GPS-satelitov (zračni upor in relativistični vplivi), problem enačbe gibanja (1) numerično rešujemo z metodo Runge-Kutta-Nyström:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}(t, \vec{r}), \quad (3)$$

kjer potrebujemo manjše število korakov obdelave.

Postopek reševanja problema z numerično integracijo je zahteven tudi zato, ker moramo poleg zunanjih vplivov na gibanje umetnega satelita zmodelirati tudi pojave precesije, nutacije, rotacije Zemlje in gibanja polov in ker moramo izračune izvajati tako v nebesnem kot tudi v terestričnem koordinatnem sistemu.

2.2 Interpolacija

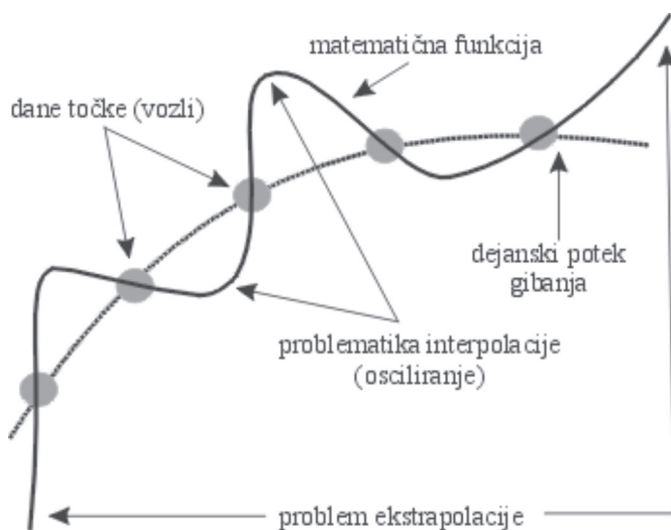
Diskretni podatki o položajih satelitov, ki so podani v časovno ekvidistantnih tabelah, omogočajo uporabo interpolacijskih tehnik pri izračunu položaja umetnega satelita v poljubnem trenutku. V primeru, da imamo na voljo $(n + 1)$ podatkov ekvidistantne časovne tabele (v našem primeru imamo tri nize takih podatkov: komponente x , y in z vektorja položaja), to je $f(t_0)$, $f(t_1)$, ..., $f(t_n)$, obstaja interpolacijski polinom p_n , ki zadošča enačbi:

$$p_n(t_i) = f(t_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (4)$$

Polinom p_n lahko zapišemo v obliki Lagrangevega, Nevillovega, Newtonovega interpolacijskega polinoma, v obliki zlepkov ali s pomočjo trigonometričnih funkcij.

Interpolacijske metode so za uporabo enostavnejše in veliko hitrejšje kot postopki numerične integracije, saj v postopku računanja ne modeliramo zunanjih sil na gibanje umetnega satelita, ampak iz danih diskretnih podatkov o položaju satelita na tirnici modeliramo le polinom. Druga prednost uporabe postopkov interpolacije izhaja iz možnosti, da interpolacijski polinom določimo v katerem koli koordinatnem sistemu (nasprotno kot pri zahtevah numerične integracije). Glede na to, da interpolacijske metode ne temeljijo na fizikalnem ozadju določanja vplivov na gibanje satelitov, so v smislu natančnosti manj učinkovite in je rezultate računanja vedno treba ovrednotiti z rezultati, pridobljenimi z bolj natančnimi postopki, to je z numerično integracijo.

Značilna slabost uporabe interpolacijskih polinomov je nihanje (osciliranje), kar je posebno izrazito na krajiščih interpolacijskega intervala. Zato postopke interpolacije izvajamo odsekoma s polinomi n -te stopnje tako, da polinom služi za izračun novih položajev satelitov le na sredini interpolacijskega območja (Schüler, 2001).



Slika 4: Določitev interpolacijskega polinoma in problemi.

V povezavi s problemom izračuna GPS-satelitov v poljubnem trenutku iz podatkov preciznih efemerid se je najbolj uveljavila uporaba Lagrangevega polinoma različnih stopenj (od 8 do 11, celo do 22), uporabne so tudi druge vrste polinomov: Nevillov polinom, Newtonov polinom, interpolacija z diferenčnimi tabelami, z zlepci in trigonometrična interpolacija.

Postopki interpolacije so primerni tudi takrat, ko želimo določene podatke shraniti v tako imenovani stisnjeni obliki - namesto, da bi skladiščili podatke o položajih satelitov za kratek časovni interval (v primeru GPS nas zanimajo tudi intervali velikosti nanosekunde), raje skladiščimo koeficiente interpolacijskih polinomov. S temi lahko naknadno določimo položaj satelita v katerem koli trenutku. Pri tem si največkrat pomagamo s Čebiševim polinomom.

2.3 Aproksimacija

Osnovna razlika aproksimacijskih funkcij glede na interpolacijske polinome izhaja iz zahteve, da mora interpolacijski polinom potekati skozi točke - dane podatke, medtem ko se jim z aproksimacijskimi funkcijami v skladu z določenimi kriteriji le približamo. Zato pa aproksimacijske funkcije lahko nadgradimo oziroma izboljšamo na primer s postopki linearnega filtriranja ali kolokacije. Ker aproksimacijske funkcije ne potekajo skozi točke - dane podatke, nam nasprotno kot interpolacijski polinomi lahko nudijo podatke za določitev funkcije trenda v postopku linearnega filtriranja.

2.3.1 Aproksimacija s trigonometričnimi vrstami

V primeru obravnavanja tirnic GPS-satelitov je najbolj uporabna tehnika, ki jo uporabljamo za določitev položajev satelitov v poljubnem trenutku, prilagoditev trigonometričnih polinomov po kriterijih, značilnih za metodo najmanjših kvadratov. Na ta način so določeni tudi podatki oddanih efemerid.

Na polodprtem intervalu $[0, 2p)$ po kriterijih metode najmanjših kvadratov določimo periodično funkcijo (Zakrajšek, 2000):

$$f_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(kt) + b_k \cdot \sin(kt)), \quad (5)$$

kjer si pri izpeljavi koeficientov a_0 , a_k in b_k lahko pomagamo tudi s Fourierjevo transformacijo.

Metodo je primerneje uporabiti v povezavi z obravnavanjem Keplerjevih elementov elipse tira, za katere so značilne dolgoperiodične in kratkoperiodične spremembe. Slednje najlaže opišemo s sinusno-kosinusnimi harmoničnimi koeficienti. Od tod izhajajo dodatni parametri popravkov za nekatere elemente Keplerjeve elipse tira v datotekah oddanih efemerid (Cuc, Cus, Cic, Cis, Crc, Crs), da lahko upoštevamo velikosti zunanjih vplivov.

2.3.2 Aproksimacija z linearnim filtriranjem

Postopek nam omogoča izboljšavo postopka aproksimacije in temelji na dveh korakih: določitev

funkcije trenda (aproksimacijske metode) in nadaljnje linearno filtriranje (velikokrat v literaturi v povezavi s postopkom zasledimo pojem kolokacije po metodi najmanjših kvadratov). Prednost linearnega filtriranja pred postopkom izravnave po metodi najmanjših kvadratov bi lahko opisali z možnostjo dodatnega modeliranja lokalnih odstopanj, odvisnih od oddaljenosti med diskretnimi točkami. Če v danih diskretnih točkah zadostimo pogoju normalne porazdelitve, je glavni namen empirična določitev kovariančne funkcije za nadaljnje obravnavanje kovariančnih matrik.

V postopku linearnega filtriranja vektor opazovanj l izrazimo z vsoto nemodeliranega sistematičnega dela s in šuma r (Mikhail, Ackerman, 1976):

$$l = s + r, \quad (6)$$

matematični model izračuna popravkov vrednosti v novih točkah s_0 pa predstavimo kot:

$$s_0 = \Sigma_{s_0l} \Sigma_{ll}^{-1} l, \quad (7)$$

kjer sta:

Σ_{s_0l} kovariančna matrika interpolacijske točke glede na dane točke,

Σ_{ll} kovariančna matrika v danih diskretnih točkah.

Za določitev funkcije trenda lahko uporabimo katero koli aproksimacijsko funkcijo, medtem ko postopki interpolacije niso uporabni zato, ker so odstopanja v danih točkah enaka nič. Na danem primeru se je kot uporabno orodje določitve funkcije trenda izkazala tudi umetna nevronska mreža z vzratnim razširjanjem napake (angl. backpropagation) (Pavlovčič Prešeren, 2003).

3 NUMERIČNI PRIMERI IN REŠITVE

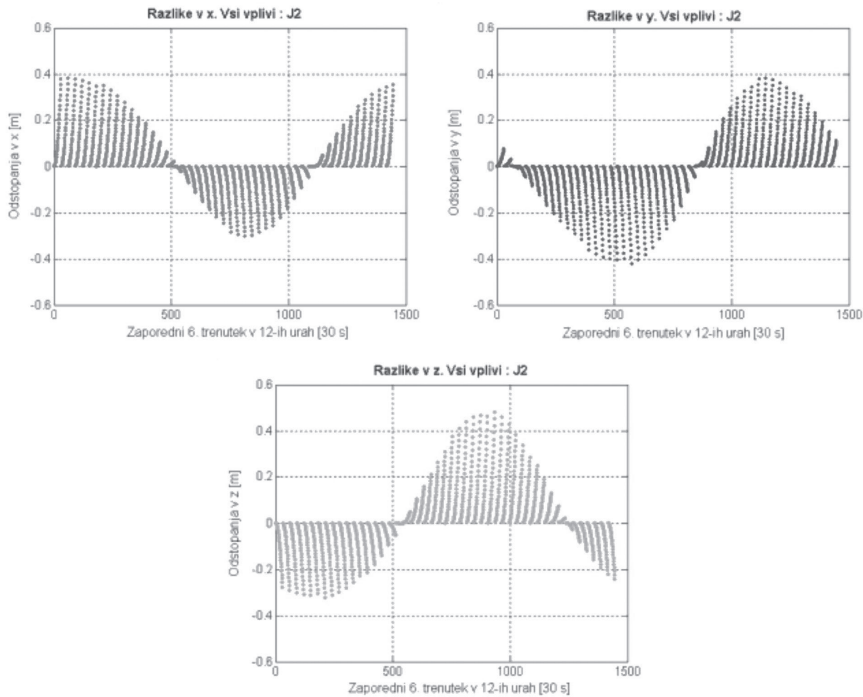
3.1 Numerična integracija

Najbolj učinkovita metoda v smislu natančnosti in najmanj primerna glede hitrosti računanja – numerična integracija – je zamuden postopek, saj izračun poteka diskretno po korakih, pri čemer širina koraka h ne sme biti prevelika. Širino koraka si izberemo glede na hitrost gibanja umetnega satelita (v primeru GPS-satelitov ta znaša približno 4 km/s). Za vsak korak obdelave moramo modelirati vse zunanje vplive na GPS-satelit (v obliki pospeškov), izvesti pretvorbo med terestričnim in nebesnim koordinatnim sistemom (modeliranje precesije, nutacije, rotacije Zemlje in gibanja polov) in nato izvesti še izračun različnih koeficientov za nadaljnjo numerično rešitev diferencialne enačbe. Če naknadno želimo pridobiti podatke o položaju satelitov znotraj integracijskega intervala, ki smo ga izbrali, moramo dodatno izvesti numerično integracijo z veččlenskimi metodami.

Če postopek izračuna želimo pospešiti in ne modeliramo vseh zunanjih vplivov na gibanje GPS-satelita, izračunane vrednosti preveč odstopajo od danih. Za primer na sliki 5 prikazujemo velikost odstopanja rezultatov, če v obdelavo ne vključimo vseh zunanjih vplivov, ampak le vpliv privlačne

sile Zemlje, katere gravitacijsko polje opišemo s conskim koeficientom J_2 . S tem sicer povečamo hitrost obdelave, vendar so odstopanja izračunanih vrednosti od danih vrednosti prevelika (do 4 dm). Razlog, da so v okviru 15-minutnega intervala odstopanja na desnem krajišču največja, izhaja iz narave problema numerične integracije – kopičenja pogreškov pri računanju.

V povezavi s postopkom numerične integracije moramo omeniti še dva momenta, ki narekujejo na možnost uporabe metode. V široki množici podatkov preciznih GPS-efemerid po nam znanih podatkih le služba NIMA poleg podatkov o položajih GPS-satelitov nudi tudi hitrosti (brez vektorja hitrosti v začetnem trenutku t_0 ($v(t_0)$) numerične integracije ne moremo uporabiti). Podrobnejša analiza podatkov službe NIMA pa je pokazala, da natančnost podatkov o položajih GPS-satelitov ni najboljša in jo lahko primerjamo šele z vnaprej predvidenimi preciznimi efemeridami službe IGS (Pavlovčič Prešeren, 2003).



Slika 5: Primer, ko v obdelavo z numerično integracijo ne vključimo vseh zunanjih vplivov – velikost odstopanj narašča v odvisnosti od položaja GPS-satelita na tirnici.

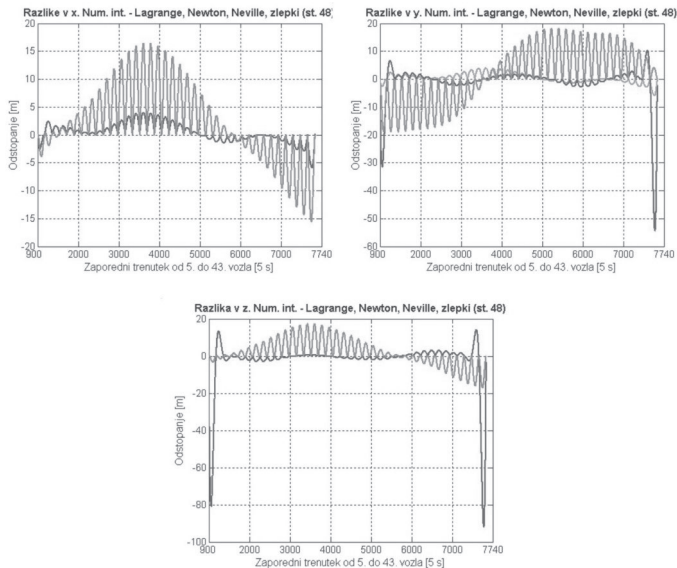
3.2 Interpolacija

V literaturi največkrat rešitev določitve položaja GPS-satelita iz preciznih efemerid opisujejo s postopki interpolacije. Rešitev je razmeroma enostavno sprogramirati, vendar problem določitve položaja GPS-satelita v poljubnem trenutku rešujemo neodvisno po posameznih komponentah vektorja položaja (posebej za x , y in z). Za rešitev imamo na voljo več polinomov, vendar je v literaturi največkrat opisana uporaba Lagrangevega interpolacijskega polinoma, čeprav postopek

ni optimalen v smislu hitrosti računanja. Tu uporabimo n podatkov za določitev polinoma stopanje ($n-1$), v splošnem pa ni treba imeti na voljo n ekvidistantnih podatkov.

Pri uporabi interpolacije za rešitev problema je dovolj, da imamo podane le podatke o položaju (ne pa tudi hitrosti). Če nas v določenem trenutku zanima velikost vektorja hitrosti, ga dobimo tako, da izračunamo prvi odvod interpolacijskega polinoma, z drugim odvodom dobimo velikost zunanjih sil na gibanje GPS-satelita. Postopek izvedbe interpolacije je razmeroma hiter, četudi jo izvajamo diskretno po korakih. Ker večina GPS-služb v datoteke s preciznimi efemeridami podaja le podatke o položajih GPS-satelitov, lahko sklepamo, da komercialni programski paketi zaprtega tipa (tj. vpogled v programsko kodo ni mogoč) vključujejo opisano rešitev.

Postopek interpolacije je sicer treba uporabljati z določeno mero previdnosti, zato je treba poznati lastnosti interpolacije. Znan je problem nihanja interpolacijskega polinoma, predvsem na krajiščih intervala (slika 6). Tam namreč izračunane vrednosti preveč odstopajo od pravih. Znan je tudi rešitev tega problema: uporaba tako imenovane interpolacije po odsekih. To pomeni, da polinome nižjih stopenj (od 8 do 11, tudi do 22) uporabimo le za interpolacijo na sredini definicijskega območja, kjer so razlike izračunanih in pravih vrednosti dovolj majhne, sledi naknadna določitev drugega interpolacijskega polinoma.



Slika 6: Nihanje interpolacijskih polinomov: Lagrange, Newton, Neville. Odstopanja so pri različnih uporabah interpolacijskih polinomov drugačna.

3.3 Aproksimacija

V primeru, ko v programske pakete obdelave GPS-opazovanj lahko vključimo precizne efemeride (ki vključujejo le podatke o položajih), pa vendar programski paket od nas zahteva tudi podatke

oddanih efemerid, lahko sklepamo o rešitvi problema s postopkom aproksimacije. V splošnem lahko postopek uporabimo tudi le s podatki preciznih efemerid. Aproksimacijo na danem mestu omenjamo zato, da bi lahko predstavili prednost metode pred interpolacijo. Ker aproksimacijska funkcija ne poteka natanko skozi točke (kot to velja pri interpolacijskem polinomu), ampak se jim v skladu z določenimi kriteriji približa, jo lahko uporabimo za funkcijo trenda in naprej izvedemo postopek kolokacije. Postopek zahteva nekaj več časa, vendar so rezultati izračuna v smislu natančnosti na celotnem intervalu podatkov preciznih efemerid enakega velikostnega reda.

4 ZAKLJUČEK

Problem uporabe preciznih efemerid v obdelavi GPS-opazovanj je treba poznati z več vidikov. V osnovi je treba poznati odgovore na tri ključna vprašanja: kdaj precizne efemeride uporabiti, katere podatke morajo efemeride vsebovati in kakšna je točnost podatkov preciznih efemerid. Uporabnikom GPS-tehnologije tekom obdelave programski paketi vprašanj niti ne zastavljajo, saj so odgovori že praktično rešeni, večkrat pa jih ti celo obidejo in nas slepo vodijo do cilja. Ob iskanju odgovorov na vprašanja in ob razumevanju prednosti in slabosti posameznih metod spoznamo kompleksnost metod in razumemo, zakaj so se avtorji programskih paketov odločili za konkretno izbiro posamezne metode. Ob tem se lahko sami odločimo za optimalno rešitev danega problema.

Problematiko uporabe preciznih efemerid bi lahko razdelili v tri dele, in sicer: problem časovne zakasnitve pridobitve podatkov, problem okrnjene oblike podatkov in problem točnosti podatkov. V članku smo podrobneje opisali postopek pridobitve za nas vhodnih podatkov obdelave GPS-opazovanj in najbolj znane metode izračuna položaja GPS-satelita na tirnici. Utemeljili smo prednosti že znanih metod in njihove pomanjkljivosti. Med naštetimi metodami, ki vse izhajajo iz poglavja numerične analize, smo pokazali prednost numerične integracije v smislu natančnosti izračuna in slabost v smislu potrate časa. Spoznali smo različne interpolacijske metode ter utemeljili, zakaj moramo rezultate izračuna vedno primerjati s tistimi, ki jih dobimo s postopkom numerične integracije. Nazadnje smo utemeljili smiselnosti uporabe aproksimacijskih metod, ki pred interpolacijskimi prednjačijo v smislu možnosti nadgradnje metod s postopki kolokacije. Z aproksimacijskimi metodami pridobimo funkcije, ki ne potekajo ravno skozi točke (dane podatke), ampak se jim v skladu z določenimi kriteriji približajo (interpolacijski polinomi pa potekajo natanko skozi dane točke), zato jih lahko uporabimo za funkcije trenda v nadaljnjem postopku kolokacije.

Vse, kar smo opisali, je že znano in tudi vključeno v programske pakete obdelave GPS-opazovanj. Ker pa nobena od opisanih rešitev ni optimalna, imamo še vedno prostor, da naredimo korak naprej in poiščemo novo metodo, ki bo, ali v smislu natančnosti ali hitrosti izračuna, imela prednosti, ki bi jih bilo smiselno izkoristiti.

Literatura in viri:

Ackerman, A. (1976). *Observations and Least Squares*. University Press of America.

Montenbruck, G. (2000). *Satellite Orbits*. Springer Verlag.

Pavlovčič Prešeren, P. (2003). *Metode izračuna položaja GPS-satelita za potrebe geodezije*. Doktorska disertacija. Ljubljana: Fakulteta za gradbeništvo in geodezijo.

Pavlovčič Prešeren, P., Stopar, B. (2004). *Izračun položaja GPS-satelita iz podatkov oddanih efemerid*. *Geodetski vestnik* št. 48 (2), 151–167.

Schüler, T. (2001). *On Ground-Based GPS Tropospheric Delay Estimation*. Doktorska disertacija, Heft 73 Neubiberg, 2001.

Zakrajšek, E. (2000). *Numerična analiza*. Fakulteta za matematiko in fiziko, skripta 2000.

asist. dr. Polona Pavlovčič Prešeren, univ. dipl. inž. geod.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: ppavlovc@fgg.uni-lj.si

izr. prof. dr. Bojan Stopar, univ. dipl. inž. geod.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 2, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: bstopar@fgg.uni-lj.si

Prispelo v objavo: 19. april 2005

Sprejeto: 16. maj 2005