

DOLOČITEV ABSOLUTNEGA POLOŽAJA GPS-SPREJEMNIKA IZ KODNIH OPAZOVANJ

ABSOLUTE GPS POSITIONING FROM CODE OBSERVATIONS

Polona Pavlovčič Prešeren, Bojan Stopar

UDK: 528.28

POVZETEK

V prispevku obravnavamo nekaj algoritmov določitve absolutnega položaja in popravka sprejemnikove ure iz podatkov opazovanj kodnih psevdorazdalj. Problem razdelimo v direktne in iterativne rešitve za primer, ko imamo na voljo podatke opazovanj štirih ali več satelitov. Dodatno predstavimo tudi rešitev določitve položaja s tremi psevdorazdaljami (rešitev z apriori znano višino), pogostega problema v avtomobilski navigaciji. Tekom posameznih izpeljav obravnavamo prednosti metod in geometrične pogoje, ki vodijo od več rešitvam k najbolj verjetni. Namen prispevka je izbrati optimalno metodo za določitev začetnih vrednosti neznanek za rekurzivno obdelavo s Kalmanovim filtriranjem oziroma za določitev apriori vrednosti za nadaljnjo obdelavo s faznimi opazovanji. Metode izračuna primerjamo na izbranih trenutkih sprejema GPS-signala, z uporabo oddanih efemerid in ob modeliranju troposferske refrakcije in aberacije Zemlje v za ta namen izdelanem programu v okolju Matlab R14. Z nadaljnjimi analizami pokažemo, da na končne rezultate vpliva tudi število satelitov in čas trajanja opazovanj.

KLJUČNE BESEDE

GPS (Global Positioning System), absolutni položaj, enačba psevdorazdalje, pogrešek ure, rešitev z apriori znano višino, Kalmanovo filtriranje, oddane efemeride, troposferska

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.02

ABSTRACT

In the article we present the single point positioning procedures from pseudoranges for obtaining the absolute position of the GPS antenna and its clock offset. First we define the direct and iterative solutions from four or more pseudoranges, further we derive a solution from three pseudoranges used in situations with obstructions to the receiver-to-satellite line of sights, for example in vehicle navigation (altitude hold mode). We present the theoretic demonstration of preferences of each method and discuss the geometric conditions leading from several solutions to the most likely one. The main purpose of this study is finding the optimal computation method to attain a well-based initial solution guess for the recursive method of computation – Kalman filtering, and to obtain quality apriori values for further carrier-phase processing. In order to achieve a well-grounded method comparison in the Matlab R14 program, we apply all methods on the same set of observation data and in connection with broadcast ephemerides considering troposphere refraction models and Earth aberration. Additional analyses show that the number of satellites and observation time interval have a significant effect on the accuracy improvement.

KEY WORDS

GPS, single point positioning, pseudoranges, clock offsets, altitude hold mode, Kalman filtering, broadcast ephemerides, troposphere refraction models, Earth aberration

1 UVOD

Ob začetku obdelave GPS-opazovanj za potrebe geodezije je treba določiti približne vrednosti določenih parametrov, ki so izhodišče za nadaljnjo obdelavo. Ena takih nalog je določitev absolutnega položaja GPS-sprejemnika iz kodnih opazovanj, ki je lahko zanimiva tudi širšemu negeodetskemu krogu bralcev. Lahko bi rekli, da je določitev absolutnega položaja GPS-sprejemnika iz kodnih opazovanj splošno najbolj uporabljena metoda GPS-izmere v realnem času, saj je dovolj, da imamo na voljo najcenejše GPS-sprejemnike. V prispevku se bomo podrobneje seznanili z različnimi metodami izračuna, ki nas privedejo od opazovanih psevdorazdalj do položaja antene GPS-sprejemnika.

Metode določitve absolutnega položaja GPS-sprejemnika delimo v direktne, iterativne in rekurzivne. Z direktnimi metodami algebraično rešujemo problem neznanega položaja GPS-sprejemnika in sprejemnikove ure iz psevdorazdalj in položajev GPS-satelitov, ne da bi vnaprej poznali približni položaj opazovališča.¹ V iterativnih metodah problem rešujemo z več koraki; znane so rešitve z oziroma brez linearizacije enačb psevdorazdalj, do rezultata pa pridemo po večkratni obdelavi opazovanj istega trenutka. V primeru iterativnih metod, ki slonijo na linearizaciji psevdorazdalj, moramo poznati približne vrednosti položaja opazovališča. Nadgradnja teh metod so rekurzivne metode, kamor uvrščamo postopek Kalmanovega filtriranja. Tu na osnovi zaporednega niza opazovanj poizkušamo najti optimalno rešitev z minimiziranjem variance napake opazovanj. Tudi v tem primeru moramo imeti na voljo približne koordinate opazovališča. Zaradi obsežnosti rešitve s Kalmanovim filtriranjem se bomo omejili le na določitev položaja opazovališča iz opazovanj enega trenutka. V določenih primerih, na primer v avtomobilski navigaciji, nimamo vedno na voljo opazovanj do štirih satelitov. Zato omenjamo tudi metode določitve položaja sprejemnika na osnovi treh psevdorazdalj. V danem primeru tekom obdelave izhajamo iz predpostavke, da se višinska komponenta položaja h ne spreminja tako hitro kot horizontalna (φ, λ) in jo zato obravnavamo kot znano, vrednost pa privzamemo iz prejšnjega koraka. Rešitev poznamo pod imenom metoda z znano apriori višino (angl. *altitude hold mode*) oziroma določitev 2D-položaja s tehnologijo GPS. Direktne metode, kjer v enem koraku pridemo do rešitve, imajo prednosti tudi zato, ker z njimi pospešimo hitrost obdelave GPS-opazovanj oziroma hitrost konvergiranja Kalmanovega filtra. Direktne algebraične rešitve določitve absolutnega položaja GPS-sprejemnika so znane že dolgo (Bancroft (1985), Fang (1986), Krause (1987), Kleusberg (1994)), v zadnjem času pa so jih izboljšali Abel in Chafee (1991, 1994), Grafarend in Shan (1996), Crocetto et al. (1998). Znani so tudi pristopi reševanja določitve absolutnega položaja z umetno nevronske mreže (Chansarkar, 2001; Jwo, 2004).

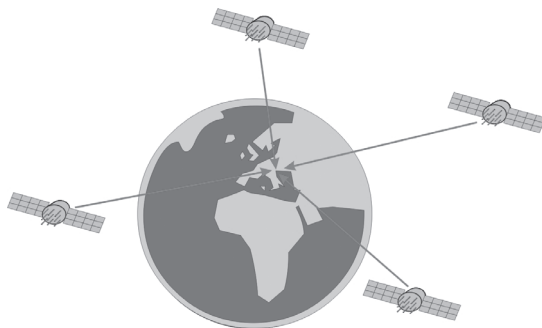
1.1 Določitev absolutnega položaja

Metodo lahko uporabimo tako pri kodnih kot pri faznih opazovanjih. V prvem primeru bomo pridobili položaj sprejemnika z nekaj desetmetrsko točnostjo, v drugem primeru pa z nekaj

¹ Opazovališče v širšem pomenu besede predstavlja točka, kjer izvajamo GPS-opazovanja. Vedeti je treba, da tekom obdelave GPS-opazovanj razlikujemo točko, na katero se nanašajo GPS-opazovanja (fazni center GPS-antene), in trajno stabilizirano točko, za katero dejansko določamo položaj. Da lahko to točko določimo, merimo višino antene. Če je ne upoštevamo, je opazovališče končna točka GPS-opazovanj - GPS-antena.

centimetrsko – govorimo o tehniki natančne določitve absolutnega položaja PPP (angl. *Precise Point Positioning*). V obeh primerih je način izvedbe izmere enak: z enim GPS-sprejemnikom izvajamo opazovanja signala vsaj štirih GPS-satelitov (slika 1), le opazovane količine so različnega tipa. V prvem primeru bomo obdelovali kodne psevdorazdalje, v drugem primeru pa dodatno še opazovanja faze nosilnega valovanja.

Princip določanja absolutnega položaja z GPS-opazovanji je podoben kot pri terestrični trilateraciji. Ko z opazovanji pridobimo razdalje do GPS-satelitov, nadalje položaj določimo s presekom krogel, katerih polmer je enak opazovanim razdaljam satelit-sprejemnik. Za neznano določitev položaja v 3D-prostoru bi morali imeti na voljo razdalje od najmanj treh satelitov, vendar šele četrta razdalja omogoča določitev razlike urinega stanja sprejemnikove ure (glede na nominalni GPS-čas). GPS-sprejemnik je tekom izmere lahko v gibanju, vendar je natančnost določitve položaja odvisna tudi od trajanja opazovanj na posameznem stojišču. Poleg tega na natančnost položaja vplivajo še drugi faktorji: kakovost GPS-sprejemnika, geometrijska razporeditev satelitov in sprejemnika (faktor GDOP), način obdelave (za boljše določitev lahko dodatno vključimo tudi Kalmanovo filtriranje).



Slika 1: Določitev absolutnega položaja na osnovi opazovanj GPS.

1.2 Določitev absolutnega položaja na osnovi kodnih psevdorazdalj

V prispevku se omejujemo na določitev absolutnega položaja za potrebe navigacije (morska točnost položaja). V sprejemnikovi kodni zanki poteka spremljanje kode satelitskega signala. S primerjavo s satelita oddane kode in v sprejemniku generirane kode pridobimo navigacijsko sporočilo in kot stranski produkt vrednosti opazovanj psevdorazdalj. Ta opazovanja se nanašajo na urino stanje sprejemnika (sprejemnikova in satelitova ura nista usklajeni). Razdalja, ki jo je signal prepotoval od satelita do sprejemnika, je enaka produktu hitrosti svetlobe ($c = 299792458$ m/s) in časa potovanja signala:

$$P_i = c(T_i - t_i), \quad (1.2.1)$$

kjer je T_i trenutek sprejema in t_i trenutek oddaje signala. Na hitrost potovanja signala vplivajo tudi troposferski in ionosferski pogoji. Zato so opazovanja, ki jih obdelujemo, le približne razdalje

med sateliti do sprejemnikov - imenujemo jih psevdorazdalje:

$$P_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + c \cdot dT - c \cdot dt_i + Tropo_i + Iono_i + e_i, \quad (1.2.2)$$

kjer so:

$\mathbf{X}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i]$	znan vektor položaja satelita i
$\mathbf{X} = [x \quad y \quad z]$	neznan vektor položaja GPS-sprejemnika
dT	pogrešek sprejemnikove ure (neznana količina)
dt_i	pogrešek ure satelita i (dano v navigacijskem sporočilu ali pa v SP3-datotekah)
$Tropo_i$	vpliv troposferske refrakcije
$Iono_i$	vpliv ionosferske refrakcije
e_i	drugi neodstranjeni vplivi.

Enačbo psevdorazdalje poenostavimo tako, da ne upoštevamo vpliva ionosfere in drugih neodstranjenih vplivov:

$$P_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + c \cdot dT - c \cdot dt_i + Tropo_i. \quad (1.2.3)$$

Tretji člen izraza (1.2.3), to je $c \cdot dt_i$, bomo določili iz podatkov efemerid², pogrešek troposferske refrakcije $Tropo$ pa določimo s pomočjo ustreznega modela.

Za pogrešek satelitovih ur in troposferski vpliv popravljeno psevdorazdaljo \tilde{P}_i matematično zapišemo kot:

$$\tilde{P}_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} + c \cdot dT = \rho_i + b, \quad (1.2.4)$$

kjer razdaljo med i -tim satelitom in sprejemnikom označimo z ρ_i , produkt $c \cdot dT$ pa označimo z b . Enačba (1.2.4), kjer nastopajo štiri neznanke (x, y, z, b), nam predstavlja izhodišče za nadaljnje določanje položaja GPS-opazovališča iz popravljenih psevdorazdalj z različnimi metodami.

2 MATEMATIČNI MODELI DOLOČITVE ABSOLUTNEGA POLOŽAJA IZ TREH KODNIH PSEVDORAZDALJ

2.1 Direktna rešitev – brez pogreška sprejemnikove ure

Tu predpostavljamo, da nimamo pogreška urinega stanja sprejemnikove ure³ ($b = 0$), zato je metoda zgolj približna. Služi za izhodišče določanja položaja s štirimi ali več sateliti z iteracijskimi metodami. Za tri satelite tako zapišemo enačbo psevdorazdalje v najbolj poenostavljeni obliki,

² Pogrešek satelitovih ur rekonstruiramo nazaj s pomočjo koeficientov polinoma, ki so podani v podatkih broadcast efemerid, ali pa vrednost direktno dobimo iz datotek s preciznimi efemeridami.

³ Pogrešek sprejemnikove ure 1 ns vodi do pogreška v izmerjeni psevdorazdalji približno 0,29 m.

tj. brez vplivov:

$$\widehat{P}_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.1)$$

ter enačbe kvadriramo:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_i x - 2y_i y - 2z_i z + (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \widehat{P}_i^2) = 0, \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.1.2)$$

Če odštejemo tretjo enačbo iz sistema (2.1.2) od prve in druge, dobimo:

$$\begin{aligned} a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 &= 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + d_2 &= 0 \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Sistem enačb (2.1.3) zapišemo matrično:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -d_1 - c_1 z \\ -d_2 - c_2 z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_1 - c_1 z \\ -d_2 - c_2 z \end{bmatrix} \quad (2.1.4)$$

kjer so:

$$\begin{aligned} a_j &= x_3 - x_j, \quad b_j = y_3 - y_j, \quad c_j = z_3 - z_j, \\ d_j &= \frac{-\left(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2 - P_3^2\right) + \left(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2 - P_j^2\right)}{2}, \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Od tod izrazimo parametrično enačbo za položaj:

$$x = x_0 + \lambda \cdot t, \quad y = y_0 + \mu \cdot t, \quad z = t, \quad (2.1.6)$$

kjer so:

$$\begin{aligned} x_0 &= -\alpha \cdot d_1 - \beta \cdot d_2, \quad y_0 = -\gamma \cdot d_1 - \delta \cdot d_2 \\ \lambda &= -\alpha \cdot c_1 - \beta \cdot c_2, \quad \mu = -\gamma \cdot c_1 - \delta \cdot c_2. \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

Izraze (2.1.5) do (2.1.7) vključimo v sistem enačb (2.1.2) in jih preuredimo, da dobimo kvadratno enačbo (neznanka t):

$$g_1 \cdot t^2 + 2 \cdot g_2 \cdot t + g_3 = 0 \quad (2.1.8)$$

kjer so:

$$g_1 = \lambda^2 + \mu^2 + 1, \quad g_2 = -[(x_1 - x_0)\lambda + (y_1 - y_0)\mu + z_1], \quad g_3 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + z_1^2 - P_1^2 \quad (2.1.9)$$

Dobimo 3 enačbe s tremi neznankami, kjer najprej določimo t , potem pa še λ in μ ter naprej neznani položaj sprejemnika X z izrazi (2.1.6).

2.2 Direktna rešitev – z apriori znano elipsoidno višino

Iz sistema treh enačb psevdorazdalj (1.2.4) določamo štiri neznanke ob predpostavki, da se višina opazovališča h ne spreminja oziroma je vnaprej znana (angl. *altitude hold*). To zapišemo s pomočjo kvadratne forme (Phatak et al., 1999):

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{\Gamma} \cdot \mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{X}^T = 1 \quad (2.2.1)$$

Pogoj o znani višini vključuje diagonalna matrika:

$$\mathbf{\Gamma} = \text{diag} \left[\frac{1}{a_{WGS-84} + h} \quad \frac{1}{a_{WGS-84} + h} \quad \frac{1}{b_{WGS-84} + h} \right] \quad (2.2.2)$$

pri čemer sta a_{WGS-84} in b_{WGS-84} polosi elipsoida WGS-84. Problem rešimo tako, da neznani vektor položaja sprejemnika \mathbf{X} zapišemo kot funkcijo količine b , naprej pa s formiranjem polinoma četrte stopnje za b s substitucijo za \mathbf{X} določimo b . Ko poznamo b , določimo še \mathbf{X} . Modifikacija nekaterih metod (npr. Krause, 1987) omogoča direktno rešitev problema in direktno računanje v koordinatnem sistemu ECEF (angl. *Earth Centered Earth Fixed*).

Pri izpeljavi modificirane rešitve Krause izhajamo iz treh enačb oblike (1.2.4). Definirajmo dva vektorja Ψ_1 , Ψ_2 ter matriko $\mathbf{\Omega}$:

$$\Psi_1 = \mathbf{X}_1^T - \mathbf{X}_2^T, \quad \Psi_2 = \mathbf{X}_1^T - \mathbf{X}_3^T, \quad \mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{bmatrix}_{(2 \times 3)}. \quad (2.2.3)$$

Naprej določimo

$$\mathbf{r}_i = \xi_i \cdot \mathbf{\Omega} + \mathbf{u} \cdot l_i, \quad \text{kjer je: } \mathbf{r}_i = \mathbf{X}^T - \mathbf{X}_i^T \text{ za } i = 1, 2, 3, \quad (2.2.4)$$

pri čemer je \mathbf{u} enotski vektor, pravokoten na ravnino, ki jo določajo trije sateliti. Rešitev za ξ_1 podajajo izrazi:

$$\xi_1^T = \frac{1}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \left[\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{pmatrix} \right], \quad \mathbf{M}_1 = \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{\Omega}^T, \quad S_{ii} = \Psi_i \cdot \Psi_i^T, \quad J_i = \rho_{i+1}^2 - \rho_1^2, \quad i = 1, 2, \quad (2.2.5)$$

rešitev za l_1 pa:

$$l_1^2 = \rho_1^2 - |\xi_1 \cdot \mathbf{\Omega}|^2. \quad (2.2.6)$$

Ko določimo ξ_1 in l_1 , določimo $\cdot \mathbf{r}_1$ (2.2.4), naprej pa velja: $\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \mathbf{r}_1$.

V primeru psevdorazdalj imamo dodatno neznanke b , zato enačbo za l_1 (2.2.6) zapišemo drugače:

$$l_1^2 = (\tilde{P}_1 - b)^2 - |\tilde{\xi}_1 \cdot \mathbf{\Omega} - (\tilde{\xi}_1 - \xi_1) \cdot \mathbf{\Omega}|^2 \quad (2.2.7)$$

kjer sta:

$$\hat{\xi}_i^T = \frac{1}{2} \mathbf{M}_1^{-1} \left[\begin{pmatrix} \hat{J}_1 \\ \hat{J}_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} S_{11} \\ S_{22} \end{pmatrix} \right], \quad \hat{J}_i = \tilde{P}_{i+1}^2 - \tilde{P}_1^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.2.8)$$

Velja:

$$\hat{J}_i - J_i = 2 \cdot b \cdot K \quad \text{in} \quad \hat{\xi}_i^T - \xi_i^T = b \cdot \mathbf{M}_1^{-1} \cdot \begin{bmatrix} K_1 \\ K_2 \end{bmatrix}, \quad \text{kjer je: } K_i = \tilde{P}_{i+1} - P_i \quad (2.2.9)$$

Zgornje izraze vključimo v (2.2.7), da določimo l_1 kot funkcijo b :

$$l_1^2 = (\tilde{P}_1 - b)^2 - |\hat{\mathbf{g}}_1 - b \cdot \boldsymbol{\omega}|^2, \quad (2.2.10)$$

kjer sta:

$$\hat{\mathbf{g}}_1 = \hat{\xi}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = [K_1 \quad K_2] \mathbf{M}_1^{-1} \boldsymbol{\Omega}. \quad (2.2.11)$$

l_1 izračunamo iz kvadratne enačbe:

$$l_1^2 = a_1 \cdot b^2 + a_2 \cdot b + a_3, \quad (2.2.12)$$

$$a_1 = 1 - \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad a_2 = 2 \cdot (\hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}^T - \tilde{P}_1), \quad a_3 = \tilde{P}_1^2 - \hat{\mathbf{g}}_1 \cdot \hat{\mathbf{g}}_1.$$

V osnovi so metodo izpeljali tako, da so b določili iz enačb štirih psevdorazdalj (rešujemo kvadratno enačbo za b). V danem primeru pa do kvadratne enačbe pridemo tako, da X določimo kot funkcijo b in l_1 in naprej vključimo v izraz (2.2.2).

Iskani vektor položaja sprejemnika zapišemo kot:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_1 + \xi_1 \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u} \cdot l_1 = \mathbf{X}_1 + \hat{\xi}_1 \cdot \boldsymbol{\Omega} - (\hat{\xi}_1 - \xi_1) \cdot \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u} \cdot l_1 = \mathbf{X}_1 + \hat{\mathbf{g}}_1 - \boldsymbol{\omega} \cdot b + \mathbf{u} \cdot l_1 \cdot \mathbf{X} \quad (2.2.13)$$

Upoštevamo še:

$$\mathbf{X} \cdot \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} \cdot b + \boldsymbol{\gamma} \cdot l_1$$

$$\boldsymbol{\alpha} = (\mathbf{X}_1 + \hat{\mathbf{g}}_1) \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\beta} = -\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\Gamma}, \quad \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\Gamma}. \quad (2.2.14)$$

Zgornji izraz vstavimo v pogoj (2.2.1) ob upoštevanju kvadratne enačbe za l_1 (2.2.13), da dobimo:

$$A + B \cdot b + C \cdot b^2 = l_1 \cdot (D + E \cdot b), \quad \text{kjer so:} \quad (2.2.15)$$

$$\begin{aligned} A &= \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \cdot a_3 - 1, & B &= \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \cdot a_2 + 2 \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}^T \\ C &= \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^T + \boldsymbol{\gamma} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \cdot a_1, & D &= -2 \cdot \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T, & E &= -2 \cdot \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\gamma}^T \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

izračunamo iz polinoma četrte stopnje, ki ga dobimo tako, da kvadriramo obe strani enačbe (prvi izraz 2.2.15) in naredimo ponovno substitucijo za l_1 (2.2.12)

$$\begin{aligned} & (C^2 - a_1E^2)b^4 + (2BC - 2a_1DE - a_2E^2)b^3 + \dots \\ & + (B^2 + 2AC - a_1D^2 - 2a_2DE - a_3E^2)b^2 + (2AB - a_2D^2 - 2a_3DE)b + (A^2 - a_3D^2) = 0 \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Od tu naprej rešujemo enačbo (2.2.16) analitično – določamo ničle polinoma četrte stopnje. Ko določimo pravo vrednost za b , preko l_1 izračunamo vektor neznanega položaja sprejemnika X .

Pravo vrednost izmed štirih izračunanih za b in pravo vrednost izmed dveh izračunanih za l_1 (torej osem vrednosti) dobimo po premisleku. Predznak za l_1 izberemo tako, da zadostimo (2.2.15), ostanejo še 4 možne rešitve za X . Izmed teh sta navadno dve, ki ne zadostita enačbi (1.2.4), od preostalih možnih rešitev pa kot verjetno rešitev izberemo tisto, ki zadosti geometrijskemu pogoju in zastavljenemu pogoju pogreška ur sprejemnika. Geometrijski pogoj se nanaša na predpostavko, da morajo biti vsi koti med sprejemnikom in sateliti ostri – drugače povedano: produkt $(X_i - X) \cdot X$ mora biti pozitiven. Pri uporabi drugega pogoja moramo vedeti, ali situacijo določitve položaja sprejemnika iz treh psevdorazdalj rešujemo na začetku ali v sredini niza zaporednih opazovanj. V drugem primeru si pomagamo z izračunanimi parametri ur iz prejšnjega koraka in jih ekstrapoliramo za izbrani trenutek. Če situacijo s tremi opazovanji rešujemo na začetku opazovanj, so parametri ur v znanem časovnem intervalu.⁴ Dodatno zanemarimo še nesoglasje trenutka oddaje glede na GPS-čas in upoštevamo, da so pogreški sprejemnikove ure v definicijskem območju [-10 ms, 10 ms], kar ustreza razdaljam v območju [-3000000 m, 3000000 m]. Velja pa vedeti, da opisana metoda ne deluje vedno; takrat moramo počakati na opazovanja četrtega satelita.

3 MATEMATIČNI MODELI DOLOČITVE ABSOLUTNEGA POLOŽAJA IZ ŠTIRIH ALI VEČ PSEVDORAZDALJ

Znanih je več matematičnih modelov določitve absolutnega položaja iz štirih ali več psevdorazdalj. Glede na način rešitve jih lahko razdelimo v direktne ali iterativne, slednje pa glede na to, ali tekom obdelave izvedemo postopek linearizacije ali ne. Pri linearizaciji je dobro poznati približne vrednosti neznank, da postopek izračuna poteka hitreje. Hkrati je delovanje metod odvisno tudi od geometrijske razporeditve satelitov in opazovališča (faktor GDOP). Najbolj elegantno rešitev problema (tudi časovno najmanj potratno) za situacijo z natanko štirimi opazovanji, ki so jo kasneje izpeljali tudi za večje število opazovanj, je podal Bancroft. Na podobni osnovi so direktno rešitev predstavili tudi drugi avtorji (Crocetto et al., 1998). Slednji so predstavili tudi iterativno rešitev brez linearizacije enačb psevdorazdalj. V smislu geometričnega razumevanja situacije je zelo zanimiva analitična rešitev, ki jo je podal Kleusberg (1994). Vsaka izmed metod ima svoje prednosti in slabosti, ki jih podrobneje opisujemo v nadaljevanju. V smislu razumevanja problema in rešitev predstavljamo našete metode z vmesnimi izpeljavami in komentarji.

⁴ GPS-sprejemniki namreč delujejo tako, da za začetni trenutek privzamejo trenutek oddaje (po prvem sprejemu signala) in ga dodatno povprečijo za čas potovanja signala, kar znaša približno 70 ms.

3.1 Algoritem Bancroft

Leta 1985 je Bancroft predstavil direktno rešitev določitve absolutnega položaja za primer enostranskih opazovanj dolžin. Temelji na matričnem reševanju sistema linearnih enačb in nadaljnji rešitvi skalarne kvadratne enačbe. Ta sicer vodi do dveh rešitev, vendar je ena izmed njih povsem nesmiselna. Algoritem lahko uporabimo tudi na drugem tipu opazovanj, znana pa je tudi uporaba algoritma na primeru kombinacije eno- in dvostranskih opazovanj, kjer določamo ničle polinoma četrte stopnje (Anderson in Tran, 2003).

Izhajamo iz izhodišča, da imamo v danem trenutku na voljo položaj vsaj štirih satelitov v geocentričnem koordinatnem sistemu (i -ti satelit: x_i, y_i, z_i) ter smo opazovani psevdorazdalji P_i prištetli vpliv popravka satelitovih ur $c \cdot dt_i$, v drugi iteraciji pa odšteli tudi popravek troposferske refrakcije (*Tropo*)⁵ in upoštevali aberacijo Zemlje. V vektor s_i uvrstimo znane količine vezane na i -ti satelit, v vektor \mathbf{u} pa neznanke (položaj opazovališča: x, y, z ter pogrešek sprejemnikove ure dT , ki ga zaradi numerične stabilnosti modela pomnožimo s hitrostjo svetlobe c):

$$\mathbf{s}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad \tilde{P}_i]^T, \quad \mathbf{u} = [x \quad y \quad z \quad b]^T.$$

Za satelit i ter za določene vplive popravljeno psevdorazdaljo \tilde{P}_i ter za neznanke količine iz vektorja \mathbf{u} zapišemo funkcionalni model za izbrani trenutek (Yang in Chen, 2001):

$$\tilde{P}_i - b = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2}. \quad (3.1.1)$$

Funkcijo kvadriramo:

$$\begin{aligned} \tilde{P}_i^2 - 2\tilde{P}_i b + b^2 &= (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2 \\ &= x_i^2 - 2x_i x + x^2 + y_i^2 - 2y_i y + y^2 + z_i^2 - 2z_i z + z^2 \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

in preuredimo:

$$(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \tilde{P}_i^2) - 2(x_i x + y_i y + z_i z - \tilde{P}_i b) + (x^2 + y^2 + z^2 - b^2) = 0. \quad (3.1.3)$$

Nadalje enačbo (3.1.3) preuredimo tako, da si pomagamo z Lorentzovim produktom⁶:

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{s}_i \rangle - \langle \mathbf{s}_i, \mathbf{u} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle = 0 \quad (3.1.4)$$

⁵ Troposfersko refrakcijo modeliramo v odvisnosti od višinskega kota satelita in meteoroloških pogojev na opazovališču, ki so odvisni od višine opazovališča h . V prvi iteraciji predpostavljamo, da se nahajamo v središču Zemlje (x^0, y^0, z^0) = (0, 0, 0), zato nimamo dovolj podatkov za določitev parametrov, s katerimi določimo vpliv troposferske refrakcije na izmerjeno dolžino.

⁶ Lorentzov produkt je definiran kot: $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \equiv \mathbf{u}^T \mathbf{M} \mathbf{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 - u_4 v_4$, kjer sta: $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^4$ in matrika

$$\mathbf{M}_{4 \times 4} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M} = \mathbf{M}^T. \text{ Velja tudi: } \langle \mathbf{M} \mathbf{u}, \mathbf{M} \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle.$$

Izhajamo iz oznak:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & \tilde{P}_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & \tilde{P}_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 & \tilde{P}_3 \\ x_4 & y_4 & z_4 & \tilde{P}_4 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} \langle \mathbf{s}_1, \mathbf{s}_1 \rangle \\ \langle \mathbf{s}_2, \mathbf{s}_2 \rangle \\ \langle \mathbf{s}_3, \mathbf{s}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{s}_4, \mathbf{s}_4 \rangle \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}, \quad \Lambda = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle. \quad (3.1.5)$$

V primeru, da imamo na voljo n psevdorazdalj, je matrika \mathbf{B} dimenzije $n \times 4$, vektorja \mathbf{a} , \mathbf{e} sta velikosti $n \times 1$, medtem ko je Λ skalar. Sistem n enačb z oznakami (3.1.5) preuredimo v obliko (3.1.4):

$$\mathbf{a} - \mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{u} + \Lambda\mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (3.1.6)$$

Če imamo na voljo opazovanja od štirih satelitov, lahko rešimo enačbo (3.1.6):

$$\mathbf{u} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{B}^{-1} \cdot (\Lambda\mathbf{e} + \mathbf{a}) \quad (3.1.7)$$

Ker količina Λ tudi vsebuje vektor \mathbf{u} , enačbo (3.1.7) vstavimo v enačbo (3.1.6), uporabimo zvezo $\langle \mathbf{M}\mathbf{u}, \mathbf{M}\mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$ in enačbo kvadriramo, da dobimo:

$$\langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e} \rangle \Lambda^2 + 2 \left(\langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{e}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a} \rangle - 1 \right) \Lambda + \langle \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a} \rangle = 0 \quad (3.1.8)$$

Obstajata dve rešitvi kvadratne enačbe (3.1.8), ena izmed teh je pravilna (primerljiva velikost s polmerom Zemlje).

Če imamo na voljo več kot štiri psevdorazdalje, enačbo (3.1.6) v skladu z metodo najmanjših kvadratov preoblikujemo v niz normalnih enačb tako, da levo stran (3.1.6) pomnožimo z \mathbf{B}^T :

$$\mathbf{B}^T\mathbf{a} - \mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{M}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T\Lambda\mathbf{e} = \mathbf{0}. \quad (3.1.9)$$

Nadalje postopamo enako kot prej, da dobimo kvadratno enačbo, kjer je:

$$\langle \mathbf{B}^*\mathbf{e}, \mathbf{B}^*\mathbf{e} \rangle \Lambda^2 + 2 \left(\langle \mathbf{B}^*\mathbf{e}, \mathbf{B}^*\mathbf{a} \rangle - 1 \right) \Lambda + \langle \mathbf{B}^*\mathbf{a}, \mathbf{B}^*\mathbf{a} \rangle = 0 \quad (3.1.10)$$

in izmed dveh rešitev kot pravilno vzamemo bolj verjetno. Neznani vektor \mathbf{u} naprej določimo s pomočjo izraza (3.1.7).

3.2 Direktna rešitev – Crocetto et al.

Izpeljava temelji na podobnem izhodišču kot algoritem Bancroft, tj. na kvadriranju enačbe psevdorazdalje (3.1.1). S postopkom eliminacije neznanke iz sistema štirih enačb psevdorazdalj dobimo:

$$\begin{aligned}
 (x_4 - x_1) \cdot x + (y_4 - y_1) \cdot y + (z_4 - z_1) \cdot z - (\tilde{P}_4 - \tilde{P}_1) \cdot b + f_1 &= 0 \\
 (x_4 - x_2) \cdot x + (y_4 - y_2) \cdot y + (z_4 - z_2) \cdot z - (\tilde{P}_4 - \tilde{P}_2) \cdot b + f_2 &= 0 \\
 (x_4 - x_3) \cdot x + (y_4 - y_3) \cdot y + (z_4 - z_3) \cdot z - (\tilde{P}_4 - \tilde{P}_3) \cdot b + f_3 &= 0,
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1}$$

kjer so:

$$f_i = \frac{(x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 - \tilde{P}_i^2) - (x_4^2 + y_4^2 + z_4^2 - \tilde{P}_4^2)}{2}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{3.2.2}$$

Sistem enačb lahko zapišemo kot:

$$\begin{aligned}
 a_1 x + b_1 y + c_1 d + d_1 b + f_1 &= 0 \\
 a_2 x + b_2 y + c_2 d + d_2 b + f_2 &= 0 \\
 a_3 x + b_3 y + c_3 d + d_3 b + f_3 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.2.3}$$

Neznani položaj antene GPS-sprejemnika izračunamo iz zgornjega sistema enačb, zapisanega matrično:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} -d_1 \cdot b - f_1 \\ -d_2 \cdot b - f_2 \\ -d_2 \cdot b - f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -d_1 \cdot b - f_1 \\ -d_2 \cdot b - f_2 \\ -d_2 \cdot b - f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 + l \cdot b \\ y_0 + m \cdot b \\ z_0 + n \cdot b \end{bmatrix}
 \tag{3.2.4}$$

kjer so:

$$\begin{aligned}
 x_0 &= -\alpha_1 \cdot f_1 - \beta_1 \cdot f_2 - \gamma_1 \cdot f_3 & l &= -\alpha_1 \cdot d_1 - \beta_1 \cdot d_2 - \gamma_1 \cdot d_3 \\
 y_0 &= -\alpha_2 \cdot f_1 - \beta_2 \cdot f_2 - \gamma_2 \cdot f_3 & m &= -\alpha_2 \cdot d_1 - \beta_2 \cdot d_2 - \gamma_2 \cdot d_3 \\
 z_0 &= -\alpha_3 \cdot f_1 - \beta_3 \cdot f_2 - \gamma_3 \cdot f_3 & n &= -\alpha_3 \cdot d_1 - \beta_3 \cdot d_2 - \gamma_3 \cdot d_3
 \end{aligned}
 \tag{3.2.5}$$

Pogreške sprejemnikove ure ($b = c \cdot dT$), določimo tako, da v sistem enačb (3.2.4) vstavimo v (3.1.3). Z oznakami:

$$\begin{aligned}
 e_1 &= l^2 + m^2 + n^2 - 1 \\
 e_2 &= (x_0 - x_1) \cdot l + (y_0 - y_1) \cdot m + (z_0 - z_1) \cdot n + \tilde{P}_1 \\
 e_3 &= (x_0 - x_1)^2 + (y_0 - y_1)^2 + (z_0 - z_1)^2 - \tilde{P}^2
 \end{aligned}
 \tag{3.2.6}$$

rešujemo kvadratno enačbo:

$$e_1 \cdot b^2 + 2 \cdot e_2 \cdot b + e_3 = 0. \tag{3.2.7}$$

Dobimo dve rešitvi za b , ki ju naprej uporabimo za določitev neznanega položaja sprejemnika (3.2.4). Kot pravo rešitev (položaja sprejemnika) izberemo tisto, katere dolžina vektorja bolj ustreza polmeru Zemlje.

Opisana rešitev je zanimiva zato, ker najbolj nazorno opisuje situacijo, da je rešitev kvadratne

enačbe (3.2.7) odvisna od geometrije sateliti-sprejemnik (kar vključujejo količine $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, f_i$) in od pogreškov izmerjenih psevdorazdalj (vključujejo d_i in f_i). Metodo izračuna položaja opazovališča lahko uporabimo tudi za situacijo, ko imamo na voljo več kot štiri psevdorazdalje. V tem primeru izračunamo vse kombinacije rešitev in iz teh izračunamo povprečje. Število kombinacij štirih satelitov pri večjem številu satelitov na obzorju n strmo naraste: ko imamo na voljo opazovanja petih satelitov, je kombinacij 5, pri sedmih 35, pri devetih pa že 126.⁷ Obstaja pa tudi hitrejša rešitev: približni položaj sprejemnika določimo le za eno kombinacijo štirih satelitov, drugi korak naredimo s postopkom linearizacije enačb psevdorazdalj (podpoglavje 3.4).

3.3 Rešitev z vektorsko algebro – algoritem Kleusberg

Kleusbergova rešitev temelji na vektorski algebri, tj. rešitvi geometrije tridimenzionalnega hiperboličnega preseka, in na predpostavki, da imamo na voljo opazovanja štirih satelitov.

Vzemimo za referenčni satelit (Sat 0) enega izmed satelitov na obzorju, npr. satelit z največjim višinskim kotom. Naprej izračunamo razdalje b_i med referenčnim in drugimi sateliti in enotske vektorje \mathbf{e}_i med referenčnim satelitom in drugimi sateliti (Sat i). Tako dobljene količine opisujejo dejansko geometrijo razporeditve satelitov glede na naše opazovališče. Neznani položaj antene sprejemnika \mathbf{X} opišemo s pomočjo neznanega enotskega vektorja \mathbf{e} , tj. normiranega vektorja med referenčnim satelitom in sprejemnikom. Z d_i označimo razliko razdalje satelit-sprejemnik od razdalje referenčni satelit-sprejemnik (Kleusberg, 1999):

$$d_i = \sqrt{(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 + (z_i - z)^2} - \sqrt{(x_0 - x)^2 + (y_0 - y)^2 + (z_0 - z)^2}. \quad (3.3.1)$$

Izračunamo razdalje od referenčnega do ostalih satelitov:

$$b_i = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2 + (z_i - z_0)^2}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.3.2)$$

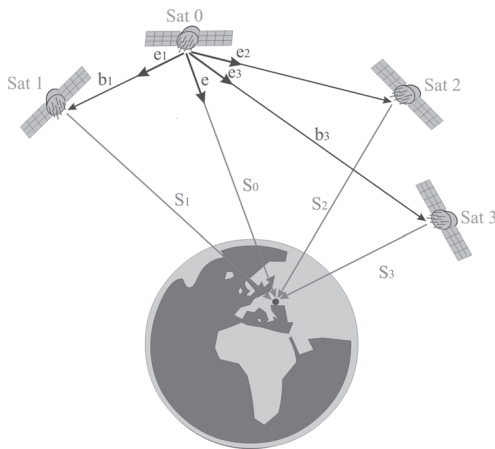
od tod pa enotske vektorje:

$$\mathbf{e}_i = \left[\begin{array}{ccc} \frac{x_i - x_0}{b_i} & \frac{y_i - y_0}{b_i} & \frac{z_i - z_0}{b_i} \end{array} \right]^T. \quad (3.3.3)$$

Naprej rešujemo geometrijo trikotnikov Sat i - Sat 0 - P, pri čemer iz skalarnega produkta med enotskima vektorjema \mathbf{e} in \mathbf{e}_i določimo vmesni kot med vektorjema:

$$s_i^2 = b_i^2 + s_0^2 - 2b_i s_0 (\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_i) \quad (3.3.4)$$

⁷ Izhajamo iz enačbe za izračun števila kombinacij: $\binom{n}{4} = \frac{n!}{4!(n-4)!}$, kjer je n število vseh satelitov, ki jih uporabimo.



Slika 3: Geometrija tridimenzionalnega hiperboličnega preseka.

Enačbo (3.3.1) lahko zapišemo kot: $s_i = d_i + s_0$, (s_0 predstavlja razdaljo med referenčnim satelitom in sprejemnikom, s_i pa razdalje med satelitom i in sprejemnikom), da v vsakem od trikotnikov dobimo povezavo med razlikami psevdorazdalj in razdaljami med sateliti in sprejemnikom:

$$s_i^2 = d_i^2 + s_0^2 + 2d_i s_0 \quad (3.3.5)$$

Enačbi (3.3.4) in (3.3.5) izenačimo, da dobimo:

$$2s_0 = \frac{b_i^2 - d_i^2}{d_i + b_i(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_i)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.3.6)$$

V sistemu treh enačb (3.3.6) so tri neznanke: dve neodvisni komponenti enotskega vektorja \mathbf{e} in razdalja s_0 . Neznano razdaljo iz sistema enačb (3.3.6) eliminiramo:

$$\frac{b_i^2 - d_i^2}{d_i + b_i(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_i)} = \frac{b_{i+1}^2 - d_{i+1}^2}{d_{i+1} + b_{i+1}(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}_{i+1})}, \quad i = 1, 2. \quad (3.3.7)$$

Na osnovi distributivnostnega zakona vektorske algebre enačbi (3.3.7) preuredimo:

$$\left[\frac{b_i}{b_i^2 - d_i^2} \mathbf{e}_i - \frac{b_{i+1}}{b_{i+1}^2 - d_{i+1}^2} \mathbf{e}_{i+1} \right] \cdot \mathbf{e} = \left[\frac{d_{i+1}}{b_{i+1}^2 - d_{i+1}^2} - \frac{d_i}{b_i^2 - d_i^2} \right], \quad i = 1, 2 \quad (3.3.8)$$

in v krajši obliki zapišemo:

$$\mathbf{F}_1 \cdot \mathbf{e} = U_1, \quad \mathbf{F}_2 \cdot \mathbf{e} = U_2. \quad (3.3.9)$$

Vektor \mathbf{F}_1 leži v ravnini, ki jo določajo sateliti 1, 2 in 3, vektor \mathbf{F}_2 pa v ravnini, ki jo določajo sateliti 1, 3 in 4. Oba vektorja in skalarja U_1 in U_2 lahko izračunamo iz znanih koordinat satelitov in iz razlik dolžin med njimi. Vendar želimo geometrično rešitev predstaviti na osnovi vektorske algebre. Enačbi (3.3.9) sta skalarna produkta vektorjev \mathbf{F}_1 oziroma \mathbf{F}_2 in enotskega vektorja \mathbf{e} . V

splošnem ima problem dve rešitvi: prva je nad in druga pod ravnino, ki jo določata vektorja \mathbf{F}_1 in \mathbf{F}_2 , le v primeru, ko sta vektorja vzporedna, rešitev ne obstaja.

Algebraično rešitev enačbe (3.3.9) lahko pridobimo z vektorskim produktom:

$$\mathbf{e} \times (\mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2) = \mathbf{F}_1 \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_2) - \mathbf{F}_2 \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_1) = U_2 \cdot \mathbf{F}_1 - U_1 \cdot \mathbf{F}_2 \quad (3.3.10)$$

Z okrajšavama:

$$\mathbf{G} = \mathbf{F}_1 \times \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{H} = U_2 \mathbf{F}_1 - U_1 \mathbf{F}_2 \quad (3.3.11)$$

enačbo (3.3.10) zapišemo v bolj enostavni obliki:

$$\mathbf{e} \times \mathbf{G} = \mathbf{H}. \quad (3.3.12)$$

Obe strani enačbe (3.3.12) množimo z \mathbf{G} , za levo stran pa uporabimo razčlenitev vektorskega produkta:

$$\mathbf{e} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) - \mathbf{G} \cdot (\mathbf{G} \cdot \mathbf{e}) = \mathbf{G} \times \mathbf{H}. \quad (3.3.13)$$

Skalarni produkt drugega člena leve strani enačbe (3.3.13) zapišemo kot produkt dolžin vektorjev in kosinusa vmesnega kota δ :

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = \sqrt{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} \cdot \cos(\delta). \quad (3.3.14)$$

Kot δ se nahaja tudi v izrazu za izračun dolžine vektorja \mathbf{H} iz enačbe (3.3.13):

$$\sqrt{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}} = \sqrt{(\mathbf{e} \times \mathbf{G}) \cdot (\mathbf{e} \times \mathbf{G})} = \sqrt{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} \cdot \sin(\delta). \quad (3.3.15)$$

Če uporabimo enačbi (3.3.14) in (3.3.15), dobimo:

$$\mathbf{G} \cdot \mathbf{e} = \pm \sqrt{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}} \cdot \sqrt{1 - \frac{\mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}}} = \pm \sqrt{\mathbf{G} \cdot \mathbf{G} - \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}}. \quad (3.3.16)$$

Zgornji izraz vstavimo v enačbo (3.3.13), da dobimo dve rešitvi enačbe (3.3.8):

$$\mathbf{e}_{1,2} = (\mathbf{G} \cdot \mathbf{G})^{-1} \left\{ \mathbf{G} \times \mathbf{H} \pm \mathbf{G} \sqrt{(\mathbf{G} \cdot \mathbf{G}) - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{H})} \right\}. \quad (3.3.17)$$

Razdaljo s_0 od referenčnega satelita Sat 0 do sprejemnika P sedaj lahko določimo iz katere koli izmed treh enačb (3.3.5), in sicer:

$$s_{1,2}^0 = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_i^2 - d_i^2}{d_i + b_i (\mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_i)}. \quad (3.3.18)$$

Imamo dve rešitvi, izmed katerih je le ena pravilna. V primeru, ko sta rešitvi nasprotnega predznaka, enostavno določimo »pravilno«. Če pa sta obe rešitvi pozitivni vrednosti, »pravilno« določimo tako, da dolžini primerjamo z radijem Zemlje (6370 km). Na koncu določimo še položaj sprejemnika P (vektor \mathbf{X}):

$$\mathbf{X}_{1,2} = \mathbf{X}^0 + s_{1,2}^0 \cdot \mathbf{e}_{1,2} . \quad (3.3.19)$$

3.4 Iterativna rešitev z linearizacijo psevdorazdalj

Nelinearne enačbe (1.2.4) lineariziramo z razvojem funkcije v Taylorjevo vrsto v okolici približnega položaja sprejemnika in v Taylorjevi vrsti obdržimo samo člene, v katerih nastopajo komponente popravkov približnega položaja $\Delta \mathbf{X}$ v prvi potenci (drugače bi bila enačba zopet nelinearna).

Ob znanem približnem položaju sprejemnika $\mathbf{X}^0 = [x^0, y^0, z^0]^T$ iz izraza (2.1.1) izračunamo približno vrednost geometrijske razdalje ρ_i^0 . Položaj sprejemnika \mathbf{X}_i izračunamo kot:

$\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i^0 + \Delta \mathbf{X}_i$. Izhajamo iz linearizirane enačbe:

$$\tilde{P}_i = \rho_i^0 - \frac{x^0 - x_i}{\rho_i^0} \Delta x_i - \frac{y^0 - y_i}{\rho_i^0} \Delta y_i - \frac{z^0 - z_i}{\rho_i^0} \Delta z_i + c \cdot dT . \quad (3.4.1)$$

Enačbo (3.4.1) preuredimo in jo zapišemo v matrični obliki, to je v obliki enačbe popravkov opazovanj $\mathbf{v} + \mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$, kjer so:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_{\tilde{P}_1} \\ v_{\tilde{P}_2} \\ \vdots \\ v_{\tilde{P}_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{x_1 - x^0}{\rho_1^0} & \frac{y_1 - y^0}{\rho_1^0} & \frac{z_1 - z^0}{\rho_1^0} & 1 \\ \frac{x_2 - x^0}{\rho_2^0} & \frac{y_2 - y^0}{\rho_2^0} & \frac{z_2 - z^0}{\rho_2^0} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{x_n - x^0}{\rho_n^0} & \frac{y_n - y^0}{\rho_n^0} & \frac{z_n - z^0}{\rho_n^0} & 1 \end{bmatrix}, \quad \Delta = \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \\ \delta b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \tilde{P}_1 - b^0 - \rho_1^0 \\ \tilde{P}_2 - b^0 - \rho_2^0 \\ \vdots \\ \tilde{P}_n - b^0 - \rho_n^0 \end{bmatrix} \quad (3.4.2)$$

kjer je n število opazovanj od GPS-satelitov. Če imamo na voljo samo 4 opazovanja (ni nadštevilnih), pridobimo vektor neznank Δ z rešitvijo sistema linearnih enačb v obliki $\mathbf{B}\Delta = \mathbf{f}$. Če imamo nadštevilna opazovanja, pridobimo ocenjeni vektor neznank Δ z rešitvijo problema s posredno izravnavo z enačbami:

$$\Delta = \mathbf{N}^{-1} \cdot \mathbf{t} \\ \mathbf{N} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{B}, \quad \mathbf{t} = \mathbf{B}^T \mathbf{P} \mathbf{f}, \quad (3.4.3)$$

kjer je \mathbf{P} matrika uteži, v primeru neodvisnih opazovanj enake natančnosti je matrika enotska. Popravke približnih vrednosti neznank (koordinat) določimo iterativno. Končne vrednosti koordinat položaja točke naprej določimo z izrazom: $\mathbf{X}_i = \mathbf{X}_i^0 + \Delta \mathbf{X}_i$.

Metodo izračuna položaja opazovališča z linearizacijo enačb psevdorazdalj uporabimo, ko imamo na voljo približne vrednosti vektorja položaja opazovališča ali v kombinacijami z metodami: Kleusberg, Crocetto

3.5 Iterativna rešitev brez linearizacije enačb psevdorazdalj (Crocetto et al.)

Če pod drobnogled vzamemo situacijo štirih opazovanih psevdorazdalj, lahko zapišemo sistem štirih nelinearnih enačb za štiri neznanke v obliki enačbe (1.2.4).

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} + b &= \tilde{P}_1 \dots \dots \dots \quad (a) \\ &\vdots \\ \sqrt{(x_4 - x)^2 + (y_4 - y)^2 + (z_4 - z)^2} + b &= \tilde{P}_4 \dots \dots \dots \quad (d) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Postopek iterativne rešitve brez linearizacije enačb opišemo s koraki:

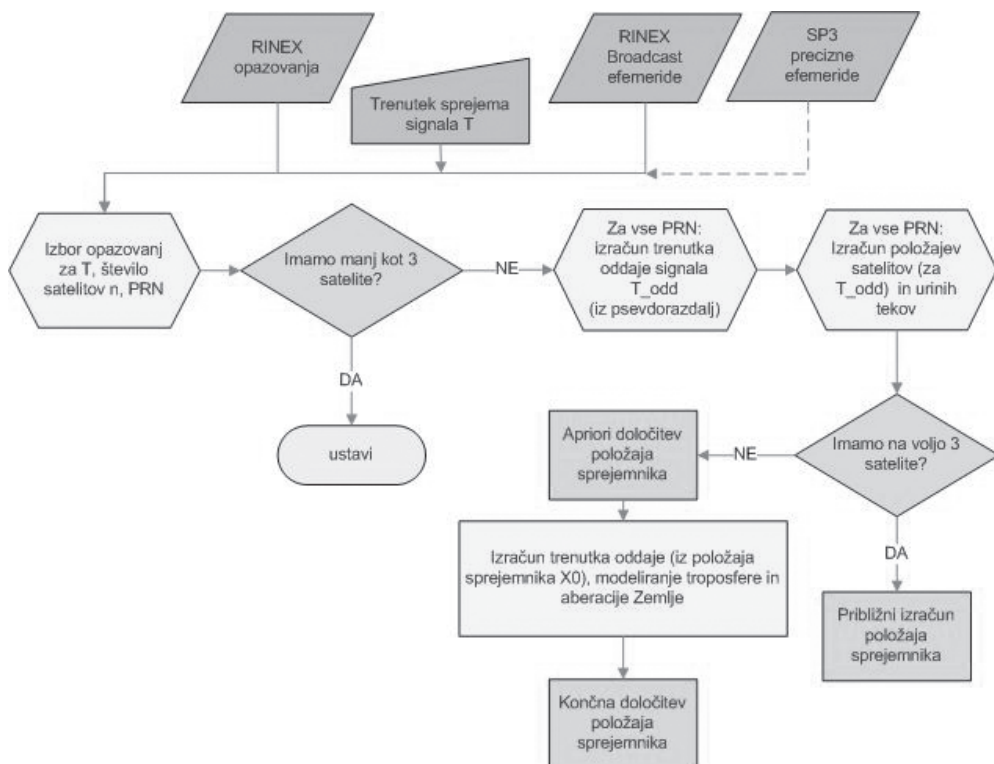
1. predpostavljajmo, da je enačba (3.5a) »pivot«;
2. začetno vrednost za b^0 nastavimo v nadaljnjih treh enačbah na 0 in določimo približne vrednosti položaja GPS-sprejemnika \mathbf{X}_1^0 (podpoglavje 3.1);
3. iz enačbe (3.5a) na osnovi izračunanega \mathbf{X}_1^0 določimo prvi približek za b_1^0 ;
4. v enačbe (3.5a – d) vstavimo prvi približek za b_1^0 in iz enačb (3.5b – d) izračunamo drugo približno vrednost položaja \mathbf{X}_2^0 (desne strani enačbe so enake $\tilde{P}_i - b_1^0$, postopamo po korakih iz podpoglavja 3.1);
5. postopek nadaljujemo, dokler ne zadostimo vnaprej izbranih kriterijev.

Omeniti velja, da je postopek odvisen tudi od tega, katero enačbo izberemo kot pivot. Lahko se zgodi, da za primer, ko je enačba (3.5a) pivot, postopek deluje, če pa bi za pivot izbrali enačbo (3.5c), pa ne. Postopek lahko uporabimo tudi za primer, ko imamo na voljo opazovanja več kot štirih satelitov.

4 NUMERICNI PRIMERI

Primerjavo zgoraj opisanih metod smo izvedli s programom, napisanim v Matlabu R14. Kot vhodni podatek uvozimo RINEX-datoteke z GPS-opazovanji in *broadcast* efemeridami (druga možnost je uporaba preciznih efemerid) ter podamo trenutek sprejema opazovanj, za katerega bomo izvedli izračun. V primeru, ko imamo na voljo opazovanja od treh satelitov, troposferske refrakcije ne modeliramo, saj je račun le približen. Vpliv troposfere na opazovanja lahko modelirano šele, ko smo določili položaj GPS-sprejemnika⁸, zato moramo postopek izračuna položaja sprejemnika izvesti dvakrat. Postopek obdelave pospešimo, če približne parametre troposferske refrakcije poznamo in jih ne računamo – to pomeni, da dva iteracijska koraka nista več potrebna. V primeru, ko položaj določamo iz kodnih opazovanj, lahko vpliv atmosfere na razširjanje signala tudi zanemarimo, saj je vpliv manjši od natančnosti opazovanj (troposferska refrakcija podaljša psevdorazdaljo za približno 2–3 m, na horizontu celo več).

⁸ Troposferska refrakcija je odvisna od meteoroloških pogojev na opazovališču, ti pa od višine opazovališča ter od višinskega kota satelita.



Slika 3: Diagram poteka, kjer prikazujemo pripravo podatkov do oblike, uporabne ne glede na metodo izračuna.

Metode smo preizkusili na izbranem nizu podatkov opazovanj za leto 2005 (MRZL1711.05O) za točko Mrzlica ob ustreznem nizu *broadcast* efemerid (MRZL1711.05N). Prvotni namen primerjave algoritmov določitve položaja opazovališča v smislu hitrosti računa in optimizacije smo z izdelanim programom razširili. Z različnimi obdelavami smo naprej želeli pokazati:

- kateri tip kodnih opazovanj (C/A ali P koda) vodi do boljšega rezultata,
- kako na določitev položaja vpliva število satelitov oziroma posamezni sateliti,
- kako čas trajanja opazovanj vpliva na izboljšanje določitve položaja.

Kot izhodišče za primerjavo smo privzeli položaj, določen s tehniko natančne določitve absolutnega položaja PPP v programskem paketu Bernese 5.0.

4.1 Izbira algoritma

Metode določitve absolutnega položaja iz kodnih opazovanj se razlikujejo že v teoretični zasnovi pa tudi v hitrosti izračuna. Za vse zgoraj naštet metode smo izdelali programe in jih primerjali. Velja omeniti, da se rezultati izračuna za en trenutek lahko med seboj zelo razlikujejo. V veliko primerih z algoritmom Kleusberg problema ne moremo rešiti na enostaven način. Glede na kriterij hitrosti izračuna in tudi glede zanesljivosti določitve neznanega položaja je najbolj učinkovit algoritem Bancroft, medtem ko sta ostali direktni metodi (Crocetto et al. in Kleusberg) glede

hitrosti računanja potratni za situacije z več kot štirimi sateliti. Takrat moramo za vse možne kombinacije štirih satelitov določiti položaj in rezultate povprečiti. Kljub temu metodi po hitrosti izračuna lahko vseeno primerjamo z algoritmom Bancroft na nekoliko drugačen način: s poljubnimi štirimi sateliti določimo položaj, do končne ocene pa pridemo tako, da postopek nadaljujemo s postopkom izravnave po metodi najmanjših kvadratov, kjer enačbe psevdorazdalj lineariziramo (podglavje 3.4).

Primer:

Iz datoteke MRZL1711.05O pod drobnogled vzemimo obdelavo opazovanj za trenutek 0-15-00 oziroma za časovni interval ene ure oziroma za celotni interval (približno 48 ur).

Za trenutek 0-15-00 imamo na voljo 8 satelitov, in sicer: PRN 2, 5, 6, 10, 16, 21, 25, 30 z opazovanji:

PRN	C/A koda [m]	P koda [m]
2	24623201.56300	24623195.21140
5	24668655.72700	24668658.83240
6	20512136.14800	20512140.40240
10	23909199.78100	23909206.18040
16	24294636.87500	24294640.08640
21	22235513.96100	22235517.07840
25	22079118.65600	22079122.73440
30	21424491.30500	21424495.25440

Preglednica 1: Opazovanja iz datoteke MRZL17112.05O za trenutek 0-15-00.

Obdelava podatkov z algoritmom Bancroft, kjer smo upoštevali tudi troposfersko refrakcijo, nas vodi do rezultatov:

	X [m] (ΔX [m])	Y [m] (ΔY [m])	Z [m] (ΔZ [m])	Δr [m]
C/A koda	4271016.594 (45.4370)	1153127.340 (71.6270)	4580632.140 (8.2120)	85.220
P koda	4271012.319 (49.7120)	1153126.942 (72.0250)	4580631.553 (8.7990)	87.956
PPP	4271062.031	1153198.967	4580640.352	—

Preglednica 2: Rezultati obdelave opazovanj iz preglednice 1 z algoritmom Bancroft.

Obdelava podatkov štirih opazovanj z algoritmom Kleusberg in Bancroft, kjer smo upoštevali tudi troposfersko refrakcijo, nas vodi do rezultatov:

	Bancroft	Kleusberg
	X (ΔX) [m]	X (ΔX) [m]
	Y (ΔY) [m]	Y (ΔY) [m]
	Z (ΔZ) [m]	Z (ΔZ) [m]
4 sateliti: 2, 5, 6, 10	4271016.59 (45.44) 1153127.34 (71.63) 4580632.14 (8.21)	4271085.83 (23.80) 1153980.33 (781.37) 4581078.01 (437.66)
4 sateliti: 2, 5, 6, 16	4270918.73 (-143.30) 1154037.22 (838.26) 4580936.83 (296.48)	položaja ne moremo določiti
4 sateliti: 2, 5, 16, 21	4271125.59 (-63.56) 1153183.01 (15.96) 4580760.53 (-120.18)	4271118.59 (-56.56) 1153208.11 (-9.15) 4580760.17 (-119.82)

Preglednica 3: Rezultati obdelave opazovanj iz preglednice 1 z algoritma Bancroft in Kleusberg.

Iz preglednice 3 vidimo, da iz opazovanj določenih satelitov z algoritmom Kleusberg položaja ne moremo določiti, medtem ko je v numeričnem izračunu algoritem Bancroft bolj zanesljiv. Razlog, da z algoritmom Kleusberg v specifičnih situacijah ne moremo določiti položaja, izhaja iz narave izpeljave algoritma - v »neugodni« geometrijski razporeditvi satelitov (slab GDOP) in sprejemnika se pogosto pojavi zgoraj predstavljeni problem. Zaradi problematične določitve neznanega položaja antene GPS-sprejemnika v določenih situacijah z algoritmom Kleusberg bi bilo pred začetkom obdelave opazovanj smiselno oceniti, ali je geometrijska razporeditev satelitov primerna za uporabo določenega algoritma. Zaradi opisane pomanjkljivosti smo v nadaljevanju uporabili direktno metodo določitve absolutnega položaja z uporabo algoritma Bancroft.

Položaj, določen na osnovi enega trenutka opazovanj, lahko od »pravega« (absolutni položaj, določen s tehniko PPP) odstopa tudi 80 metrov in več, kar je razvidno iz preglednice 3 (Δr). V RINEX-datoteki z opazovanji je navadno v glavi datoteke podan tudi približni položaj (preglednica 4, ~ 48 ur opazovanj); v našem primeru od pravega odstopa približno meter. Vedeti je treba, da približni položaj v RINEX-datoteki z opazovanji ni določen le na osnovi enega trenutka, ampak je to povprečje vseh položajev iz vseh trenutkov opazovanj. To hkrati tudi pomeni, da je kakovost določitve položaja opazovališča odvisna od trajanja opazovanj, kar podrobneje podajamo spodaj (preglednica 4).

Na osnovi rezultatov (preglednica 4) lahko zaključimo, da je čas izvajanja opazovanj pomemben v približni določitvi položaja GPS-sprejemnika iz kodnih opazovanj. Že po eni uri opazovanj se Δr odstopanje zmanjša za nekaj deset metrov in znaša 66 m. V primeru, ko imamo za dani časovni interval na voljo več opazovanj (krajši interval registracije), je hitreje pričakovati boljše rezultate.

Število epoh	X [m] (ΔX [m])	Y [m] (ΔY [m])	Z [m] (ΔZ [m])	Δr [m]
1 trenutek (0-15-00)	4271016.594 (45.4370)	1153127.340 (71.6270)	4580632.140 (8.2120)	85.220
5 minut (10 epoh)	4271005.508 (56.5230)	1153129.244 (69.7230)	4580634.217 (6.1350)	89.966
10 minut (20 epoh)	4270999.438 (62.5930)	1153129.109 (69.8580)	4580637.200 (3.1520)	93.851
30 minut (60 epoh)	4271001.646 (60.3850)	1153134.924 (64.0430)	4580627.974 (12.3780)	88.888
1 ura (107 epoh)	4271044.560 (17.4710)	1153137.716 (61.2510)	4580660.937 (-20.5850)	66.938
~ 48 ur (2865 epoh)	4271061.674 (0.3570)	1153198.920 (0.0470)	4580640.956 (-0.6040)	0.703

Preglednica 4: Položaji, določeni iz C/A kodnih opazovanj za daljše časovne intervale. V oklepaju podajamo odstopanja od položaja, določenega s tehniko PPP.

Pri določitvi položaja GPS-sprejemnika je pomembno tudi število satelitov, predvsem pa kvaliteta opazovanj posameznih satelitov. Lahko se zgodi, da je natančnost določitve položaja z manj opazovanji boljša (primer osmih in sedmih satelitov - prvi dve vrstici preglednice 5), z enakim številom, vendar različnimi opazovanji, pa dobimo različne rezultate. Glede na velika odstopanja določitve položaja bi bilo v obdelavo zaporednega niza opazovanj (način uporabe v Kalmanovem filtru) treba vključiti tudi teste za odkrivanje grobo pogrešenih opazovanj. Na ta način bi skrajšali potrebni čas opazovanj in hitreje prišli do končnega rezultata.

Število satelitov PRN	X [m] (ΔX [m])	Y [m] (ΔY [m])	Z [m] (ΔZ [m])	Δr [m]
8 satelitov 2, 5, 6, 10, 16, 21, 25, 30	4271016.594 (45.437)	1153127.340 (71.627)	4580632.140 (8.212)	85.220
7 satelitov 2, 5, 6, 10, 16, 21, 25	4271055.211 (6.820)	1153156.639 (42.281)	4580670.994 (-30.641)	52.660
7 satelitov 5, 6, 10, 16, 21, 25, 30	4270968.137 (93.894)	1153133.098 (65.869)	4580645.713 (-5.361)	114.820
6 satelitov 2, 5, 6, 10, 16, 21	4271002.977 (59.054)	1153193.720 (5.247)	4580644.181 (-3.829)	59.410
6 satelitov 6, 10, 16, 21, 25, 30	4270921.295 (140.736)	1153139.323 (59.644)	4580491.580 (148.772)	213.301
5 satelitov 2, 5, 6, 10, 16	4270949.861 (112.170)	1153196.429 (2.538)	4580655.106 (-14.754)	113.165
5 satelitov 10, 16, 21, 25, 30	4271011.628 (50.403)	1153176.474 (22.493)	4580747.932 (-107.580)	120.913

4 sateliti	4271093.480	1153957.298	4581079.972	
2, 5, 6, 10	(-31.4490)	(-758.3310)	(-439.6200)	877.109
4 sateliti	4271437.580	1153013.220	4580953.010	
16, 21, 25, 30	(-375.5490)	(185.7470)	(-312.6580)	522.775

Preglednica 5: Položaji, določeni za isti trenutek (0-15-00), vendar z različnim številom razdalj opazovanih satelitov (od osem do štiri) in različnimi opazovanji (opazovanja različnih satelitov).

Pri določitvi položaja GPS-sprejemnika je pomembno tudi število satelitov, predvsem pa kvaliteta opazovanj posameznih satelitov. Lahko se zgodi, da je natančnost določitve položaja z manj opazovanji boljša (primer osmih in sedmih satelitov – prvi dve vrstici preglednice 5), z enakim številom, vendar različnimi opazovanji, pa dobimo različne rezultate. Glede na velika odstopanja določitve položaja bi bilo v obdelavo zaporednega niza opazovanj (način uporabe v Kalmanovem filtru) treba vključiti tudi teste za odkrivanje grobo pogrešenih opazovanj. Na ta način bi skrajšali potrebni čas opazovanj in hitreje prišli do končnega rezultata.

5 ZAKLJUČEK

Določitev položaja opazovališča iz kodnih opazovanj je pomemben in eden prvih korakov obdelave GPS-opazovanj, saj na osnovi dobro določenega apriori položaja zmanjšamo število iteracijskih korakov in pospešimo obdelavo GPS-opazovanj. Dobra določitev absolutnega položaja vodi do hitrejših določitve trenutkov oddaje signala in modeliranja vplivov na opazovanja. Znanih je več algoritmov določitve položaja, vsak od njih ima svoje prednosti in slabosti. V članku smo poizkušali pokazati pomembno vlogo direktnih rešitev, ki nas iz opazovanj in podatkov efemerid pripeljejo do položaja opazovališča (predpostavka, da izhajamo iz središča Zemlje). Že pri iterativnih rešitvah, kjer izhajamo iz lineariziranih enačb psevdorazdalj, moramo izhajati iz približnega položaja opazovališča.

Teoretično poznavanje algoritmov je pomembno tudi iz razloga, da znamo poiskati rešitve za specifične situacije, ko z določeno metodo ne moremo določiti položaja (na primer uporaba algoritma Kleusberg ali problem singularnosti sistema lineariziranih enačb psevdorazdalj). Končni kriterij izbire najboljšega algoritma se v obdelavi GPS-opazovanj nanaša tako na zanesljivost izračuna kot tudi na hitrost obdelave opazovanj. V članku smo pod drobnogled vzeli več algoritmov, med katerimi smo za nadaljnje analize izbrali algoritem direktne določitve položaja, ki ga je opisal Bancroft. Slednji v primerjavi z algoritmom Kleusberg prednjači v hitrosti in zanesljivosti izračuna, saj izpeljava temelji na možnosti določitve položaja opazovališča z večjim številom opazovanih satelitov (metoda najmanjših kvadratov), medtem ko ostale metode (Kleusberg, Crocetto et al.) temeljijo na določitvi položaja z natanko štirimi opazovanimi sateliti.

Z izdelanim programom v okolju Matlab R14 smo lahko naredili analize, ki nam jih programi zaprtega tipa ne dovoljujejo. Pokazali smo, zakaj je treba GPS-opazovanja izvajati dlje časa in kakšno vlogo pri končni določitvi položaja imajo nadštevilna opazovanja. Pokazali smo prednosti in slabosti posameznih metod za nadaljnjo uporabo programa za rekurzivno obdelavo s Kalmanovim filtriranjem. Prav zaradi omenjene obdelave, ki je uporabna predvsem v avtomobilski

navigaciji, smo v program vključili tudi možnost določitve položaja GPS-opazovališča, če imamo na voljo manj kot štiri GPS-opazovanja. V prispevku smo poizkušali pokazati način delovanja programske opreme cenovno dostopnih GPS-sprejemnikov. Velja omeniti, da ti vključujejo rešitve določitve položaja s štirimi ali več sateliti, pa tudi s tremi, dvema ali le z enim satelitom ob dejstvu, da točnost določitve položaja ni najboljša. Od tu naprej bi lahko delo nadaljevali z analizami, kako posamezne količine vplivajo na absolutno določitev položaja. Naprej bi bilo smiselno izdelati analize, kako na kvaliteto določitve absolutnega položaja iz kodnih opazovanj v časovni vrsti vpliva prehod na uporabo novega niza *broadcast* efemerid oziroma kako na kvaliteto določitve absolutnega položaja vpliva uporaba efemerid iz GPS-almanaha.

Opomba

Delo je nastalo v okviru raziskovalnega projekta P2-227 APRS: "Geoinformacijska infrastruktura in trajnostni prostorski razvoj Slovenije".

Literatura in viri:

Anderson, M.R., Tran, T.M. (2003). *Direct Position Solutions From Mixed Ranging Measurements*. ION GNSS 2003.

Chansarkar, M. (2000). *Neural networks in GPS navigation*. GPS Solutions, Vol. 4, No. 3, John Wiley & Sons, Inc.

Crocetto, N., D'Urso, M.G., Gatti, M. (1998). *Processing of pseudorange measurements: an exact and an iterative algorithm for GPS single point positioning*. ISPRS Commission VI, WG 3.

Jwo, D.-J. (2004). *Incorporation of neural network-like processors for GPS navigation*. GPS Solutions, Springer-Verlag, 2004.

Kleusberg, A. (1999). *Analytical GPS Navigation Solution*. Vir: Krumm, F., Schwarze, V.S.: Quo vadis geodesia ...? Report Nr. 1999.6-1, Department of Geodesy and Geoinformatics, Stuttgart University, pp. 247-251.

Phatak, M., Chansarkar, M., Kohli, S. (1999). *Position Fix from Three GPS Satellites and Altitude: A Direct Method*. IEEE Transactions on Aerospace and Electronic System, Vol. 35, No. 1.

Strang, G., Borre, K. (1997). *Linear algebra, Geodesy and GPS*. Wellesley-Cambridge Press.

Yang, M., Chen, K.-H. (2001). *Performance Assessment of a Noniterative Algorithm for Global Positioning System Absolute Positioning*. Proc. Natl. Sci. Coun. ROC(A), Vol. 25, No. 2, 2001. <http://nr.stic.gov.tw/ejournal/ProceedingA/v25n2/102-106.pdf>

asist. dr. Polona Pavlovčič Prešeren, univ. dipl. inž. geod.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 3, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: ppavlovc@fgg.uni-lj.si

izr. prof. dr. Bojan Stopar, univ. dipl. inž. geod.

FGG - Oddelek za geodezijo, Jamova 3, SI-1000 Ljubljana

E-pošta: bstopar@fgg.uni-lj.si

Prispelo v objavo: 24. avgust 2005

Sprejeto: 8. september 2005