

# ANALIZA DEFORMACIJ S HELMERTOVO TRANSFORMACIJO

DEFORMATION ANALYSIS WITH THE HELMERT TRANSFORMATION

*Krešimir Frankić*

UDK: 528.1+528.3(078.7)

## IZVLEČEK

*V drugi polovici prejšnjega stoletja je analiza deformacij postala zelo zanimiva tema raziskovanja in praktične uporabe v industriji. Predstavljeni pristop obravnave deformacij je bil razvit v kanadski provinci Britanska Kolumbija. Z njim smo želeli določiti potencialne deformacije na nekaj vodnih pregradah in plazovitih območjih na tem območju. Prvotna opazovanja so bila standardna geodetska opazovanja dolžin in smeri za horizontalni položaj in višinske razlike za višinsko predstavitev. Nekaj let pozneje so bili dodani vektorji GPS. Geodetska opazovanja v različnih epohah so bila izravnana s posredno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov na podlagi minimalnega števila vezi med neznankami. Deformacijska analiza je bila izvedena iterativno z uporabo Helmertove transformacije.*

Klasifikacija prispevka po COBISS-u: 1.04

## ABSTRACT

*In the second half of the previous century, analysis of deformations became a highly interesting subject of research and practical application in industry. The presented approach was developed in British Columbia, Canada, for the determination of potential deformations on several dams and landslide areas. Original measurements were obtained via standard surveying observation of distances and directions for horizontal positioning, and elevation differences for vertical positioning. GPS vectors were added some years later. The geodetic measurements of several epochs were adjusted with the parametric model of the method of least squares with minimum datum constraints. The deformation analysis was made with the successive application of the Helmert transformation.*

## KLJUČNE BESEDE

*deformacija, izravnava, Helmertova transformacija*

## KEY WORDS

*deformation, adjustment, the Helmert transformation*

## 1 UVOD

V geodetski znanosti razumemo deformacijsko analizo kot določanje premikov točk v geodetskih mrežah, katerih položaje določamo na podlagi geodetskih meritev v dveh ali več terminskih izmerah. Mnogi znanstveniki so poskušali vprašanje deformacijske analize rešiti na različne načine, nekateri z bolj, drugi z manj resnim teoretičnim pristopom. Od osemdesetih let prejšnjega stoletja so začeli vprašanje obravnavati zelo resno. Obravnava je v glavnem temeljila na Gauss-Markovem linearnem modelu, ki je sestavljen iz dveh komponent: funkcionalnega in stohastičnega modela. V prvem se je določila velikost spremembe položajev, kar obravnavamo kot deformacijo geodetske mreže. V drugi komponenti pa se je računala kakovost (natančnost in zanesljivost) izračunanih deformacij. V deformacijski analizi sta v smislu znanstvene korektnosti pomembni obe komponenti. Tako funkcionalni kot stohastični model morata odražati realne odnose v naravi.

Funkcionalni model mora predstavljati realne geometrijske odnose med točkami, stohastični pa mora pravilno predstavljati natančnost (kakovost) meritev. Pravilno sestavljena modela sta pogoj za kakovostno deformacijsko analizo.

V začetku sedemdesetih let prejšnjega stoletja je industrija za proizvodnjo elektrike v kanadski provinci Britanska Kolumbija ponudila avtorju tega članka organizacijo in razvoj postopkov za določanje premikov nekaterih vodnih pregrad in dveh plazišč z geodetskimi metodami. To je bil zelo velik izziv. Priznati je treba, da v Severni Ameriki tedaj ni obstajal dodelan in zanesljiv postopek deformacijske analize, ki bi ga bilo mogoče uporabiti s preureditvijo in manjšimi spremembami obstoječih postopkov. V Evropi je bilo stanje nekoliko boljše. Raziskave nekaterih geodetskih znanstvenikov (Baarda, 1968; Pelzer, 1980) so bile objavljene v strokovnih revijah, vendar zaradi spleta okoliščin niso bila poznane v širši geodetski stroki v Ameriki. Vsak je bil prepuščen svoji poti. To pot je bilo treba najti, preskusiti in nato predstaviti ter z njo prepričati odgovorne osebe, da je takšna analiza korektna in da omogoča zanesljive rezultate. Pri tem je treba še poudariti, da je bilo računalništvo takrat še v povojih. Na trg so prihajali prvi osebni računalniki, ki pa so bili počasni in so imeli majhne zmogljivosti. Zato je bilo treba pri razvoju uporabnih metod deformacijske analize upoštevati tudi niz dodatnih vprašanj, povezanih z numeričnimitežavami pri reševanju zahtevnih matematičnih modelov. V teoretičnem smislu je bila metoda najmanjših kvadratov relativno dobro poznana. Algoritmi reševanja funkcionalnega in stohastičnega modela so bili vključeni v študijske programe, vendar brez izravnave prostih mrež in transformacije S. Šele čez deset let je izravnava prostih mrež postala reden in običajen sestavni del teh programov.

Kot je mogoče slutiti, je bil avtor postavljen pred težavo, ki je bil zanimiva, a zapletena. Rešitev, do katere je prišel, je zanimiva iz zgodovinskega vidika in prav zaradi tega je morda vredna podrobnejšega opisa v nadaljevanju.

## 2 KONTROLNE MREŽE IN NJIHOVA IZRAVNAVA

Tako kot v široko uporabljenih modernih postopkih deformacijske analize nekega objekta, se je tudi takrat (v sedemdesetih in osemdesetih letih prejšnjega stoletja) deformabilno telo aproksimiralo z nizom posameznih točk. Izbira točk na objektu je potekala v sodelovanju s strokovnjaki ustreznih področij, ki so s svojimi izkušnjami in simulacijami modelov lahko predvideli potencialne deformacije objekta. Kontrolna mreža točk je bila sestavljena iz osnovne mreže domnevno mirujočih točk in točk, ki so pripadale deformabilnemu telesu. Ta delitev je verjetno posledica takrat skromnih zmogljivosti računalnikov in zaradi te omejitve se je tako najprej merila in izravnala osnovna mreža z metodo določitve minimalnega števila vezi za definiranje geodetskega datuma. Nato se je izravnala mreža točk deformabilnega telesa kot vpeta mreža na koordinatne komponente točk osnovne mreže, ki so v izravnavi predstavljale dane količine. Tak dvojni postopek izravnave je bil uporabljen samo na začetku tega obdobja, nato pa se je izvajala izravnava mreže osnovnih točk in točk deformabilnega telesa hkrati. S tem se je povečala nadštevilnost modela izravnave, kar je zagotavljalo večjo zanesljivost izračunanih koordinat, računski postopek pa se je skrajšal.

V začetku so se pri merjenju kontrolni mrež uporabljale klasične geodetske metode triangulacije in trilateracije. S časom so ugotovili, da merjene smeri zelo malo vplivajo na velikost in obliko elips pogreškov. Zato so tudi zaradi pojava elektrooptičnih razdaljemero triangulacijske meritve opustili. Vsi, ki se ukvarjajo z geodetskimi meritvami kontrolnih mrež, vedo, da merjenje kotov traja mnogo dlje kot elektronsko merjenje dolžin. V izravnavi je vpliv merjenih dolžin v primerjavi s smermi večji. Zato odstranitev merjenih smeri v velikem številu girusov ne zmanjša bistveno natančnosti položajev točk mreže.

Terenske meritve so bile izravnane s posredno izravnavo po metodi najmanjših kvadratov. Izravnava horizontalne in višinske mreže je bila ločena. Za definiranje horizontalnega geodetskega datuma so dovolj tri koordinatne komponente (koordinate ene stabilne in centralno locirane točke in še ena koordinatna komponenta dodatne točke), vertikalni datum pa je definiran z višino enega reperja. Po vsaki izravnavi sledijo običajni globalni in lokalni statistični testi za odkrivanje in lociranje grobo pogrešenih meritev. Kot testno statistiko v globalnem testu modela uporabimo razmerje med ocenjeno vrednostjo referenčne variance a posteriori in referenčno varianco a priori, ki se porazdeljuje po verjetnostni porazdelitvi  $\chi^2$ . Verjetnostna porazdelitev  $\chi^2$  ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha$  določa kritične vrednosti kritičnega intervala za izbrano testno statistiko. Globalni test modela je uspešen, če vrednost referenčne variance a priori leži znotraj izračunanega kritičnega intervala:

$$\frac{s_0^2 f}{\chi^2\left(1 - \frac{\alpha}{2}, f\right)} \leq \sigma_0^2 \leq \frac{s_0^2 f}{\chi^2\left(\frac{\alpha}{2}, f\right)}, \text{ kjer je} \quad (1)$$

$\sigma_0^2$  - vrednost referenčne variance a priori,

$s_0^2$  - ocenjena vrednost referenčne variance a posteriori vzorca meritev,

$f$  - število prostostnih stopenj (= število nadštevilnih meritev kontrolne mreže),

$\alpha = 0.05$  - stopnja tveganja ter

$\chi^2(\alpha/2, f)$ ,  $\chi^2(1 - \alpha/2, f)$  - kritični vrednosti za porazdelitev  $\chi^2$  ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha$  in številu prostostnih stopenj  $f$ .

Če globalni test modela ni uspešen, so lahko trije vzroki za to. Prvi in najmanj verjeten je, da je matematični model mreže napačno sestavljen. Drugi vzrok so nepravilno izbrane uteži meritev, kar pomeni, da so a priori vrednosti standardnih deviacij meritev napačne. Tretji razlog je prisotnost najmanj enega grobo pogrešenega opazovanja v mreži. Če zanemarimo prvi vzrok, nam ostaneta samo dva. Uteži je mogoče najlažje preveriti s primerjavo vhodnih in a posteriori vrednosti, izračunanih z inverzijo kovariančno-variančne matrike izravnanih meritev. Po izravnavi bi morale biti uteži nekoliko večje kot vhodne vrednosti. Če obstajajo velike razlike med a priori in a posteriori vrednostmi uteži, je velika možnost za napačno a priori oceno natančnosti opazovanj. To je posebej pomembno, ko imamo opravka s heterogenimi meritvami (dolžine, smeri, opazovanja GNSS). Kakorkoli že, za neuspešen globalni test modela prisotnost je največkrat krivo eno ali več grobo pogrešenih opazovanj. Za lokalni test, s katerim se locira

verjetno grobo pogrešeno opazovanje, se kot testna statistika uporablja standardizirani popravek opazovanja. Ker so za izračun standardiziranih popravkov uporabljeni rezultati izravnave, se ti porazdeljujejo po verjetnostni porazdelitvi  $\tau$ . Uporabimo tako imenovani  $\tau$ -test. Pogoji za uspešnost testa (enostranskega) je, da je vrednost standardiziranega popravka manjša od kritične vrednosti ob izbrani stopnji tveganja:

$$\frac{|v_i|}{s_i} \leq \tau(f, 1 - \alpha), \quad (2)$$

kjer je

$v_i$  - vrednost popravka  $i$ -tega opazovanja in

$s_i$  - pripadajoči standardni odklon.

Kritična vrednost se računa kot funkcija izbrane stopnje tveganja ( $\alpha = 0,001$ ) in števila prostostnih stopenj  $f = n - u$ , kjer sta  $n$  število meritev in  $u$  število neznanek. Če je grobo pogrešenih opazovanj več, se najprej locira in odstrani opazovanje z največjo vrednostjo standardiziranega popravka, potem pa se postopek iterativno ponovi.

Meritve v vsaki epohi so podvržene identičnim postopkom izravnave, globalnih in lokalnih testov modela. Pomembno je tudi poudariti, da morajo biti približne koordinate vseh točk v obeh epohah enake.

### 3 ANALIZA DEFORMACIJ

Za analizo deformacij ali premikov iz geodetskih meritev je treba poznati samo vektorje koordinatnih rešitev in pripadajoče variančno-kovariančnematrike. Ker so meritve v posameznih epohah medsebojno neodvisne, je variančno-kovariančna matrika razlike dveh vektorjev izravnanih koordinat v posamezni izmeri enaka nič:

$$\mathbf{C}_{\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_2} = \mathbf{0}. \quad (3)$$

Osnovna ničelna hipoteza za potrebe analize premikov je postavljena tako, da predpostavimo, da ne obstaja značilna razlika med položaji točk med dvema epohama:

$$H_0 : E(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \mathbf{0} \quad (4)$$

Kot alternativno hipotezo vzamemo:

$$H_1 : E(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \neq \mathbf{0} \quad (5)$$

Korektna primerjava vektorja koordinatnih rešitev je mogoča samo, ko obstaja skladnost med referenčnima variancama a posteriori dveh primerjanih terminskih izmer. Ali drugače, rezultati izravnave morajo biti homogene natančnosti. Pred testiranjem glavne hipoteze (4) je treba preveriti skladnost ocenjene vrednosti referenčnih varianc a posteriori. To skladnost preverimo z  $F$ -testom. Vrednost uporabljene testne statistike  $F_1$  se računa kot razmerje vrednosti referenčnih varianc a posteriori dveh terminskih izmer:

$$F_1 = \frac{s_{01}^2}{s_{02}^2}, \text{ če } s_{01}^2 > s_{02}^2, \text{ oziroma } F_1 = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2}, \text{ če } s_{02}^2 > s_{01}^2. \quad (6)$$

Testna statistika  $F_1$  se porazdeljuje po porazdelitvi F s prostostnima stopnjama  $f_1$  za prvo in  $f_2$  za drugo terminsko izmero, ki predstavljata število nadštevilnih meritev v posamezni izmeri. Vrednost testne statistike  $F_1$  primerjamo s kritično vrednostjo ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha = 0.05$ :

$$F_1 \leq F(\alpha, f_1, f_2). \quad (7)$$

Če je izpolnjena neenakost v izrazu (7), potem ne moremo zavrnila ničelne hipoteze o homogeni natančnosti dveh izmer. Torej lahko v nadaljnjih izračunih uporabljamo srednjo vrednost referenčne variance a posteriori dveh primerjanih terminskih izmer:

$$s_0^2 = \frac{s_{01}^2 f_1 + s_{02}^2 f_2}{f_1 + f_2}. \quad (8)$$

Rezultate izravnave koordinatnih neznank med dvema epohama testiramo z ničelno hipotezo (4). Seveda morata vektorja  $\mathbf{x}_1$  in  $\mathbf{x}_2$  predstavljati samo koordinate skupnih točk in ne smeta vsebovati elementov, kot sta orientacija ali merilo. Te neželene parametre je treba eliminirati z eno od standardnih metod v geodeziji (npr. Gaussova eliminacija orientacijskih neznank).

Ker so opazovanja v posameznih epohah izravnana na podlagi minimalnega števila vezi za definiranje geodetskega datuma, obstaja velika verjetnost za vpliv majhnih pogreškov na orientacijo in merilo mreže, posebej na točke, ki so bolj oddaljene od točk, ki definirajo datum. Za odpravo te težave je treba prvi vektor koordinat transformirati v prostor drugega z linearno transformacijo ( $\mathbf{x}_1 \Rightarrow \mathbf{x}_2$ ).

$$\begin{aligned} x_{2,i} &= ax_{1,i} - by_{1,i} + x_0 \\ y_{2,i} &= bx_{1,i} + ay_{1,i} + y_0 \end{aligned} \quad (9)$$

za  $i = 1 \dots m$

Na levi strani enačbe (9) so transformirane koordinate prve epohe, na desni strani pa originalne koordinate, dobljene neposredno iz izravnave. Za izračun transformiranih koordinat prve epohe je treba poznati vrednosti transformacijskih parametrov ( $a, b, x_0, y_0$ ) Helmertove transformacije, ki so določene na podlagi vseh  $m$  identičnih točk prve in druge izmere. Parametra  $a$  ( $a = \cos\alpha$ ) in  $b$  ( $b = \sin\alpha$ ) predstavljata smerna kosinusa transformacije,  $x_0$  in  $y_0$  pa elementa vektorja premika.

### Helmertova transformacija

Zapis Helmertove transformacije koordinat v izrazu (9) za vse točke geodetske mreže med dvema terminskima izmerama predstavlja predoločen sistem enačb za določitev neznanih transformacijskih parametrov, ki jih zapišemo v vektorju neznank  $\mathbf{x}$ :

$$\Delta = [a \ b \ x_0 \ y_0]^T. \quad (10)$$

Rešitev za  $\Delta$  izračunamo z izravnavo po metodi najmanjših kvadratov, kjer obravnavamo koordinate prve epohe kot konstante, koordinate točk druge epohe pa kot opazovanja. Na podlagi izrazov (9), ki predstavljajo enačbe opazovanj (koordinat točk v drugi terminski izmeri), zapišemo ustrezne enačbe popravkov opazovanj:

$$\begin{aligned} F_i^1: v_{x_{2,i}} - (x_{1,i}\delta a - y_{1,i}\delta b + \delta x_0) &= (x_{1,i}a^0 - y_{1,i}b^0 + x_0^0) - x_{2,i} \\ F_i^2: v_{y_{2,i}} - (x_{1,i}\delta b + y_{1,i}\delta a + \delta y_0) &= (x_{1,i}b^0 + y_{1,i}a^0 + y_0^0) - y_{2,i}, \end{aligned} \quad (11)$$

za  $i = 1 \dots m$

Ob predpostavki majhnih kotov zasuka in premika lahko približne vrednosti neznanh transformacijskih parametrov zapišemo kot:

$$\Delta^0 = [a^0 \ b^0 \ x_0^0 \ y_0^0]^T, \quad (12)$$

kjer (11) predstavlja linearen sistem  $2m$  enačb za štiri neznanne transformacijske parametre, ki ga lahko zapišemo v matrični obliki:

$$\mathbf{v} + \mathbf{A}\delta = \omega, \quad (13)$$

kjer so:

$\mathbf{v}$  - vektor popravkov opazovanj,  
 $2m \times 1$

$\delta = [\delta a \ \delta b \ \delta x_0 \ \delta y_0]$  - vektor popravkov približnih vrednosti transformacijskih parametrov,  
 $4 \times 1$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_{1,1} & -y_{1,1} & 1 & 0 \\ y_{1,1} & x_{1,1} & 0 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{1,m} & -y_{1,m} & 1 & 0 \\ y_{1,m} & x_{1,m} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad - \text{matrika koeficientov neznanek,}$$

$$\omega = \begin{bmatrix} x_{1,1} - x_{2,1} \\ y_{1,1} - y_{2,1} \\ \dots \\ \dots \\ x_{1,m} - x_{2,m} \\ y_{1,m} - y_{2,m} \end{bmatrix} \quad - \text{vektor odstopanj, ki predstavlja koordinatne razlike med izmerama.}$$

Rešitev izračunamo s sistemom normalnih enačb. Izračun matrike normalnih enačb ( $\mathbf{N}$ ) in rešitve za vektor neznanek ( $\delta$ ) opravimo z izrazi posredne izravnave po metodi najmanjših kvadratov pod predpostavko enakih natančnosti vseh koordinat točk mreže, kar pomeni, da je pripadajoča utežna matrika opazovanj enotska ( $\mathbf{P} = \mathbf{I}$ ):

$$\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}, \mathbf{u} = \mathbf{A}^T \omega, \mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1},$$

$$\delta = -\mathbf{Q}\mathbf{u}. \quad (14)$$

Izravnane vrednosti neznank (transformacijskih parametrov) so:

$$\hat{\mathbf{\Lambda}} = \mathbf{\Lambda}^0 + \delta = [1 \ 0 \ 0 \ 0]^T + [\delta a \ \delta b \ \delta x_0 \ \delta y_0]^T = [\hat{a} \ \hat{b} \ \hat{x}_0 \ \hat{y}_0]^T. \quad (15)$$

Popravki meritev v tem primeru predstavljajo elemente vektorja premikov in se izračunajo kot:

$$\mathbf{D} = \mathbf{v} = \mathbf{A}\delta + \omega. \quad (16)$$

V ravnini lahko za vsako od  $m$  točk izračunamo komponente vektorja premikov  $\mathbf{d}$  oziroma izraženo z eksplicitnimi enačbami izraza (16):

$$\begin{aligned} dx_i &= \hat{a}x_{1,i} - \hat{b}y_{1,i} + \hat{x}_0 + \omega_{x_i}, \quad dy_i = \hat{b}x_{1,i} + \hat{a}y_{1,i} + \hat{y}_0 + \omega_{y_i}, \\ d_i &= \sqrt{dx_i^2 + dy_i^2}, \quad \text{za } i = 1 \dots m, \\ \theta_i &= \arctg \frac{dx_i}{dy_i} \end{aligned} \quad (17)$$

V enačbah (17) predstavlja  $d_i$  dolžino vektorja premika točke  $i$ , kot  $\theta_i$  pa pripadajoči smerni kot. Ne glede na to, ali obstaja značilna razlika med izravnanimi položaji točk med dvema epohama ali ne, pričakujemo, da bo razlika med koordinatami točk neničelni vektor. Koordinate točk v eni in drugi meritvi so slučajne spremenljivke, za katere ne moremo pričakovati identičnih rezultatov, četudi ni deformacij v mreži. Ker so izravnava in meritve med dvema izmerama nekorelirane, matrika kofaktorjev vektorja premikov ( $\mathbf{Q}_d$ ) predstavlja enostavno vsoto matrik kofaktorjev koordinatnih rešitev v posamezni terminski izmeri:

$$\mathbf{Q}_d = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2 = \mathbf{N}_1^{-1} + \mathbf{N}_2^{-1}, \quad (18)$$

kjer sta:

$\mathbf{Q}_1$  in  $\mathbf{Q}_2$  - matriki kofaktorjev koordinatnih rešitev prve in druge terminske izmere,  $\mathbf{N}_1$  in  $\mathbf{N}_2$  - pripadajoči matriki normalnih enačb.

Kvadratna forma vektorja premikov je:

$$\mathbf{D} = \mathbf{d}^T \mathbf{Q}_d^{-1} \mathbf{d}. \quad (19)$$

Teoretična vrednost kvadratne forme bi morala biti enaka nič. Vendar pa je zaradi stohastične narave vzorca meritev in potencialnih premikov točk vrednost kvadratne forme različna od nič. Osnovno vprašanje analize premikov je, ali je vrednost kvadratne forme statistično značilna ali ne. Če je statistično značilna, potem se je vsaj ena točka značilno premaknila. Če pa ni statistično značilna, potem ne moremo govoriti o premikih točk v mreži. Vendar to še ne pomeni, da se deformacija v mreži ni zgodila. V tem primeru je mogoče, da geometrija mreže in natančnost meritev ne omogočajo dovolj velike stopnje občutljivosti, da bi lahko deformacije odkrili. Zaradi tega obstaja objektivni razlog, da ne moremo zavrnila ničelne hipoteze, ki pravi, da ne obstajajo premiki v geodetski mreži.

Test značilnosti kvadratne forme (19) se v moderni geodetski literaturi imenuje kongruenčni test ali test skladnosti. Uporabimo testno statistiko  $F_2$ , ki se porazdeljuje po Fisherjevi verjetnostni porazdelitvi in je izračunana kot:

$$F_2 = \frac{D}{s_0^2 f} \quad (20)$$

v kateri števec predstavlja kvadratno formo premikov iz izraza (19), imenovalec pa predstavlja produkt referenčne variance a posteriori in števila prostostnih stopenj. Število prostostnih stopenj je enako razliki števila koordinatnih komponent  $u$  in števila parametrov, ki definirajo datum (defekt ranga) mreže. V primeru enakega števila točk horizontalne mreže v obeh epohah in izravnave z minimalnim številom vezi to pomeni

$$f = u - 3 = \text{rang}(Q_d). \quad (21)$$

Kritično vrednost Fisherjeve porazdelitve dobimo iz tabele  $F_c = F(\alpha, f, f_1 + f_2)$ . V tej enačbi je  $f$  razsežnost prostora, v katerem obravnavamo geodetsko mrežo,  $f_1 + f_2$  pa prostostna stopnja vektorja premikov, kjer sta  $f_1$  in  $f_2$  števili nadštevilnih opazovanj v posamezni terminski izmeri.

Ničelna hipoteza, da ni deformacij med dvema epohama, zahteva izpolnitev naslednje neenakosti:

$$F_2 \leq F_c. \quad (22)$$

Če je izpolnjena neenakost (22), potem ni statističnega razloga, da bi sumili na premike katerekoli točke mreže. Če neenakost ni izpolnjena, lahko s tveganjem  $\alpha$  trdimo, da se je vsaj ena točka premaknila. V tem primeru se odstrani točka, ki ima največjo vrednost premika  $d_p$ , nato se brez te točke ponovi postopek Helmertove transformacije (od (10) do (17)). Tak iteracijski postopek se ponavlja, vse dokler ni kongruenčni test ali test skladnosti (20) uspešen. Pri tem je treba paziti, da se z eliminacijo vsake točke zmanjša tudi število nadštevilnih opazovanj  $f_{i+1} = f_i - 2$  v Fisherjevi porazdelitvi. Ko je kongruenčni test uspešen, predpostavimo, da so položaji neizločenih točk med dvema epohama nespremenjeni. Tako se s končnim vektorjem transformacijskih parametrov ponovno izračunajo vrednosti premikov za vseh  $m$  točk na podlagi izrazov (17). Obenem se izračunajo elipse premikov za vse točke iz variančno-kovariančne matrike vektorja premikov.

$$C_d = s_0^2 Q_d \quad (23)$$

Elementi standardne elipse premika (razlik koordinat točke, določenih v obeh izmerah) se računajo iz izrazov:

$$\begin{aligned} R &= \sqrt{(s_{dx}^2 + s_{dy}^2)^2 + 4s_{dxdy}^2}, \\ \lambda_1 &= \frac{1}{2}(s_{dx}^2 + s_{dy}^2 + R), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(s_{dx}^2 + s_{dy}^2 - R), \\ a &= \sqrt{\lambda_1}, \quad b = \sqrt{\lambda_2}, \quad \theta = \arctan \frac{\lambda_1 - s_{dx}^2}{s_{dxdy}}. \end{aligned} \quad (24)$$

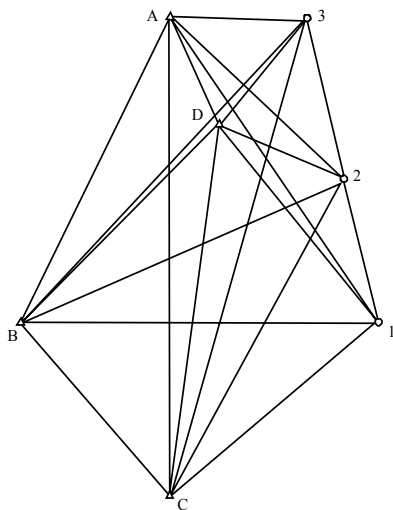


V (24) so  $s_{dx}^2, s_{dy}^2, s_{dxdy}^2$  vrednosti standardnih odklonov za posamezne koordinatne komponente, dobljene iz matrike  $C_d$

Za elipse premikov, definirane z verjetnostjo 0,95, je treba vrednosti standardnih polosi ( $a, b$ ) pomnožiti s faktorjem  $\sqrt{2F(\alpha = 0,05; 2; f)}$ . Grafični prikaz vektorjev premikov in pripadajočih elips premikov podaja kar realno sliko rezultatov analize deformacij. Kakovost analize, predvsem njenega stohastičnega dela, je tem boljša, kolikor bližje je dana točka, ki delno definira geodetski datum, težišču mreže. Seveda tega ni mogoče vedno zagotoviti.

#### 4 PRAKTIČNI PRIMER

Geodetska kontrolna mreža je sestavljena iz sedmih točk. Točke A, B, C in D obravnavamo kot relativno stabilne, točke 1, 2, in 3 pa pripadajo deformabilnemu objektu. Koordinate točk so bile določene z izravnavo na osnovi minimalnega števila vezi za definiranje geodetskega datuma, ki je bil sestavljen iz obeh koordinat točke A in abscisne komponente točke B.



Slika 1: Geometrija obravnavane geodetske mreže

Točka	y [m]	x [m]	Točka	y [m]	x [m]
A	<b>7952,492</b>	<b>9870,246</b>	1	8473,079	9119,836
B	<b>7588,716</b>	9120,970	2	8387,379	9475,223
C	7948,209	8599,071	3	8291,569	9875,252
D	8085,347	9590,085			

Preglednica 1: Dane in približne koordinate točk mreže

EPOHA 1			EPOHA 2		
od-do	dolžina [m]	$\sigma$ [m]	od-do	dolžina [m]	$\sigma$ [m]
A-B	832,959	0,009	A-B	832,953	0,009
A-C	1271,279	0,012	A-C	1271,284	0,012
A-1	913,369	0,008	A-1	913,361	0,008
A-2	587,552	0,008	A-2	587,498	0,008
A-3	339,148	0,006	A-3	339,144	0,006
B-1	884,448	0,009	B-1	884,448	0,009
B-2	873,786	0,009	B-2	873,664	0,009
B-3	1031,047	0,010	B-3	1031,050	0,010
B-C	633,798	0,007	B-C	633,796	0,007
C-1	739,461	0,008	C-1	739,453	0,008
C-2	980,163	0,010	C-2	980,081	0,010
C-3	1321,666	0,012	C-3	1321,676	0,012
1-2	365,617	0,007	1-2	365,612	0,007
2-3	411,380	0,007	2-3	411,385	0,007
D-A	310,088	0,005	D-A	310,086	0,005
D-B	683,219	0,008	D-B	683,225	0,008
D-C	1000,532	0,010	D-C	1000,538	0,010
D-1	609,500	0,008	D-1	609,495	0,008
D-2	323,139	0,006	D-2	323,046	0,006
D-3	351,955	0,007	D-3	351,956	0,007

Preglednica 2: Merjene dolžine v mreži (število stojišč = 6)

### Izravnava posamezne terminske izmere:

#### EPOHA 1:

Popravki koordinat:

$$\mathbf{d}_1^T = [-0,0365 \ 0,0444 \ -0,0872 \ 0,0486 \ -0,0099 \ 0,0828 \ -0,0168 \ 0,0654 \ 0,0168 \ 0,0292 \ 0,0310]$$

Kvadratna forma prve izravnave:  $\Omega_1 = \mathbf{v}_1^T \mathbf{P}_1 \mathbf{v}_1 = 16,281$

Referenčna varianca a posteriori:  $s_{01}^2 = \frac{\Omega_1}{20-11} = 1,809$

Globalni test epohe 1:  $H_0 : \sigma_0^2 = 1,000$

$$\chi^2_1 = \chi^2(0,975;9) = 19,023; \chi^2_2 = \chi^2(0,025;9) = 2,700$$

$$\text{spodnja meja} = \frac{s_{01}^2 \cdot 9}{\chi_1^2} = 0,856; \text{ zgornja meja} = \frac{s_{01}^2 \cdot 9}{\chi_2^2} = 6,029$$

$$0,856 \leq \sigma_0^2 \leq 6,029$$

Ker je vrednost referenčne variance a priori (1,000) med obema kritičnima vrednostima, ne obstaja objektivni razlog, da bi lahko posumili o prisotnosti grobo pogrešenih opazovanj v prvi epohi.

## EPOHA 2:

Popravki koordinat:

$$\mathbf{d}_1^T = [-0,0357 \ 0,0445 \ -0,0872 \ 0,0506 \ -0,0067 \ 0,0761 \ -0,0167 \ -0,0469 \ -0,0158 \ 0,0278 \ 0,0430]$$

$$\text{Kvadratna forma druge izravnave: } \Omega_2 = \mathbf{v}_2^T \mathbf{P}_2 \mathbf{v}_2 = 17,245$$

$$\text{Referenčna varianca a posteriori: } s_{02}^2 = \frac{\Omega_2}{20-11} = 1,916$$

$$\text{Globalni test epohe 2: } H_0 : \sigma_0^2 = 1,000$$

$$\chi_1^2 = \chi^2(0,975;9) = 19,023; \chi_2^2 = \chi^2(0,025;9) = 2,700$$

$$\text{spodnja meja} = \frac{s_{02}^2 \cdot 9}{\chi_1^2} = 0,907; \text{ zgornja meja} = \frac{s_{02}^2 \cdot 9}{\chi_2^2} = 6,386$$

$$0,907 \leq \sigma_0^2 \leq 6,386$$

Ker je vrednost referenčne variance a priori (1,000) med obema kritičnima vrednostima, tudi sedaj ne obstaja objektivni razlog, da bi lahko posumili o prisotnosti grobo pogrešenih (nestohastičnih) opazovanj v drugi epohi.

## Test homogenosti natančnosti meritev med dvema epohama:

Obe izmeri sta med seboj primerljivi, če obstaja homogenost natančnosti obeh terminskih izmer. To skladnost preverimo s statističnim testom, kjer kot ničelno hipotezo uporabimo:

$$H_0 : E(s_{01}^2) - E(s_{02}^2) = 0.$$

Skladnost referenčnih varianc a posteriori preverimo s testno statistiko  $F_p$ , opisano v enačbi (6):

$$F_1 = \frac{s_{02}^2}{s_{01}^2} = \frac{1,916}{1,809} = 1,059$$

Kritična vrednost:

$$F_c = F(\alpha = 0,05; 9; 9) = 3,179$$

Ker je empirična vrednost testne statistike (1,059) manjša od kritične teoretične vrednosti (3,179), se hipoteza homogenosti ne zavrne, torej lahko prevzamemo, da sta obe primerjani izmeri homogeni po natančnosti, in lahko zapišemo srednjo vrednost referenčne variance

aposteriori za obe izmeri:

$$s_0^2 = \frac{1}{2}(s_{01}^2 + s_{02}^2) = 1,863$$

### Analiza deformacij:

Nastavitev matrik funkcionalnega modela izravnave:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 9120,970 & 0 & 1 \\ 8599,071 & -7948,209 & 1 & 0 \\ 7948,209 & 8599,071 & 0 & 1 \\ 9590,085 & -8085,347 & 1 & 0 \\ 8085,347 & 9590,085 & 0 & 1 \\ 9119,836 & -8473,079 & 1 & 0 \\ 8473,079 & 9119,836 & 0 & 1 \\ 9475,223 & -8387,379 & 1 & 0 \\ 8387,379 & 9475,223 & 0 & 1 \\ 9875,252 & -8291,569 & 1 & 0 \\ 8291,569 & 9875,252 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} -0,00077 \\ -0,00011 \\ 0,00003 \\ -0,00202 \\ -0,00323 \\ 0,00667 \\ -0,00004 \\ -0,11226 \\ 0,03270 \\ 0,00137 \\ -0,00392 \end{bmatrix}$$

Rešitev normalnih enačb:  $\mathbf{N} = \mathbf{A}^T \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{A}^T \boldsymbol{\omega}$ ,  $\mathbf{Q} = \mathbf{N}^{-1}$ ,  $\boldsymbol{\delta} = -\mathbf{Q} \mathbf{u}$

$$\boldsymbol{\delta} = [-0,000001432 \quad 0,000015297 \quad 0,1157 \quad -0,1365]^T$$

Izračunani premiki:

$$\mathbf{d} = \mathbf{A} \boldsymbol{\delta} + \boldsymbol{\omega}$$

$$= [0,00225 \quad -0,01827 \quad -0,01632 \quad -0,02370 \quad -0,00462 \quad -0,02027 \quad -0,00918 \quad 0,08612 \quad 0,02912 \quad -0,02388 \quad -0,00125]^T$$

$$\text{Razcep: } F_2 = \frac{\mathbf{d}^T \mathbf{P}_d \mathbf{d}}{s_0^2 f} = 7,1137, f = 18$$

Kritična vrednost:  $F_c = 3,5546$

Ker je vrednost testne statistike  $F_2$  večja od kritične vrednosti, lahko s 5-odstotnim tveganjem trdimo, da se je vsaj ena točka v mreži premaknila.

### Izračun premikov točk mreže:

točka:	premik [m]	točka	premik [m]
B	0,0022	1	0,0222
C	0,0245	2	0,0909
D	0,0241	3	0,0239

Preglednica 3: Vrednosti premikov točk izračunanih iz rezultatov izravnave dveh terminskih izmer.

Premik točke 2 je največji, zato se odstrani iz nadaljnega računanja, postopek Helmertove transformacije pa se ponovi.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 9120,970 & 0 & 1 \\ 8599,071 & -7948,209 & 1 & 0 \\ 7948,209 & 8599,071 & 0 & 1 \\ 9590,085 & -8085,347 & 1 & 0 \\ 8085,347 & 9590,085 & 0 & 1 \\ 9119,836 & -8473,079 & 1 & 0 \\ 8473,079 & 9119,836 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9875,252 & -8291,569 & 1 & 0 \\ 8291,569 & 9875,252 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega}_1 = \begin{bmatrix} -0,00077 \\ -0,00011 \\ 0,00003 \\ -0,00202 \\ -0,00323 \\ 0,00667 \\ -0,00004 \\ 0 \\ 0 \\ 0,00137 \\ -0,00392 \end{bmatrix}$$

Rešitev normalnih enačb:  $\mathbf{N}_1 = \mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{u} = \mathbf{A}_1^T \boldsymbol{\omega}_1$ ,  $\mathbf{Q}_1 = \mathbf{N}_1^{-1}$ ,  $\boldsymbol{\delta}_1 = -\mathbf{Q}_1 \mathbf{u}$

$$\boldsymbol{\delta}_1 = [3,52486 \cdot 10^{-8} \quad 0,000004943 \quad 0,0387 \quad -0,0444]^T$$

Izračunani premiki točk:

$$\mathbf{d}_1 = \mathbf{A}_1 \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 = [0,00077 \quad -0,00010 \quad -0,01632 \quad -0,00003 \quad -0,00201 \quad -0,00323 \quad -0,00667 \quad 0,00004 \quad 0 \quad 0 \quad -0,00137 \quad -0,001392]^T$$

$$\text{Razcep: } F_2 = \frac{\mathbf{d}_1^T \mathbf{P}_{d_1} \mathbf{d}_1}{s_0^2 f_1} = 0,0223, f = 16$$

Kritična vrednost:  $F_c = 3,6337$

Z odstranitvijo točke 2 je vrednost testne statistike  $F_2$  (0,0223) manjša od kritične vrednosti (3,6337), zato lahko postopek izločanja domnevno nestabilnih točk ustavimo. Na koncu izračunamo še končne vrednosti premikov in pripadajoče elipse pogreškov.

Končne vrednosti premikov:

$$\mathbf{d}_F = \mathbf{A} \boldsymbol{\delta}_1 + \boldsymbol{\omega} = [0,0001 \quad -0,0004 \quad -0,0016 \quad -0,0029 \quad 0 \quad 0,0038 \quad 0,0009 \quad 0,1099 \quad 0,0354 \quad -0,0005 \quad 0,0008]^T$$

Pripadajoče elemente standardnih elips pogreškov izračunamo iz enačb (23) in (24).

točka:	premik [m]	smerni kot:	$a$ [m]	$b$ [m]	$\theta$
B	0,0103	270° 09'			
C	0,0016	77° 03'	0,056	0,018	184° 35'
D	0,0029	-0° 38'	0,035	0,011	28° 25'
1	0,0039	13° 27'	0,044	0,014	44° 58'
2	0,1155	17° 52'	0,040	0,014	49° 38'
3	0,0009	-0° 38'	0,038	0,015	107° 23'

Preglednica 4: Premiki točk in pripadajoče elipse pogreškov ob izbrani stopnji tveganja  $\alpha = 0,05$ .

## 5 SKLEP

Če danes kritično pogledamo na opisani postopek in upoštevamo, da poznamo današnje metode deformacijske analize, vidimo, da so moderne metode boljše, in sicer predvsem zato, ker upoštevajo tudi korelacijo med posameznimi točkami, medtem ko je v opisanem postopku upoštevana samo korelacija med komponentami premikov v smeri  $x$  in  $y$  za vsako točko. Kakorkoli že, metoda s Helmertovo transformacijo je veliko hitrejša, ker izravnava proste mreže zahteva več računskega časa in prostora kot izravnava z enolično definiranim datumom, kar je bilo v obravnavanem obdobju precej pomembno. Poleg tega je izravnava prostih mrež numerično manj stabilna. Dodatna sodobna novost je tudi računanje referenčne variance a posteriori, kar odpravi potrebo po testu homogenosti natančnosti (6). Poleg tega večina komercialno dostopnih programov ne omogoča izravnave prostih mrež in transformacije  $S$ , kar je za tiste, ki niso večji programiranja, velika ovira pri analizi deformacij v modernih postopkih. Ko deformacije niso velike, pa primerjava rezultatov analize deformacij s Helmertovo metodo in nekaterih drugih strožjih metod kaže, da so te razlike komaj zaznavne in mnogo manjše od natančnosti vektorjev premikov. To pomeni, da ima opisana metoda svojo vrednost in pomen. Praktični primer izravnave in analize deformacij je prikazal relativno enostavnost postopka.

## ZAHVALA

Na koncu bi se rad zahvalil Alešu Marjetiču za trud pri prevodu članka iz hrvaškega v slovenski jezik in popravke. Zaradi nezadostnega znanja slovenskega jezika ne morem presojati kakovosti prevoda. Kakorkoli, prispevek Aleša Marjetiča daleč presega »jezikovno transformacijo«. Njegovi komentarji so precej izboljšali berljivost in razumljivost teksta. Brez njega rezultat ne bi bil niti približno tako dober.

## Literatura in viri:

*Baarda, W. (1968). A testing procedure for use in geodetic networks. Netherlands Geodetic Commission, New series, Vol., num. 5, Delft, Nizozemska.*

*Frankić, K. (2010). Metoda najmanjih kvadrata u geodeziji, Geodetski odsjek Građevinskog fakulteta u Sarajevu, Sarajevo.*

*Pelzer, H. (1980). Geodätische Netze in Landes- und Ingenieurvermessung. Konrad Wittwer, Stuttgart.*

**Prispelo v objavo: 4. oktober 2011**

**Sprejeto: 2. marec 2012**

**prof. dr. Krešimir Frankić,**

Geodetski odsjek Građevinskog fakulteta u Sarajevu

e-pošta: krfrankic@inet.hr